

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

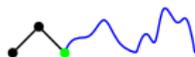
Décomposition des cDta.

Cas (i) : UD



Contribution : x^2

Cas (ii) : $UD \cdot \beta$



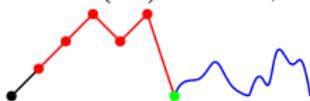
Contribution : $x^2 \cdot T(x)$

Cas (iii) : $\alpha^\#$



Contribution : $x \cdot T(x)$

Cas (iv) : $\alpha^\# \cdot \beta$



Contribution : $x \cdot T(x) \cdot T(x)$

Série génératrice des cDta.

On a donc :

$$T(x) = x^2 + x^2 \cdot T(x) + x \cdot T(x) + x \cdot T(x)^2.$$

Proposition

On a :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{2x} \\ &= x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 17x^7 + \dots \end{aligned}$$

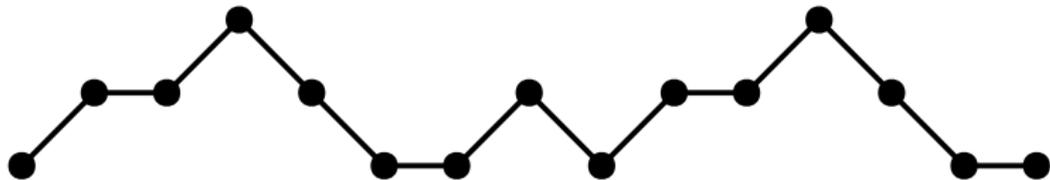
Suite énumérative pour les cDta. :

$$1, 1, 2, 4, 8, 17, \dots$$

(nombres de Catalan généralisés, OEIS A004148)

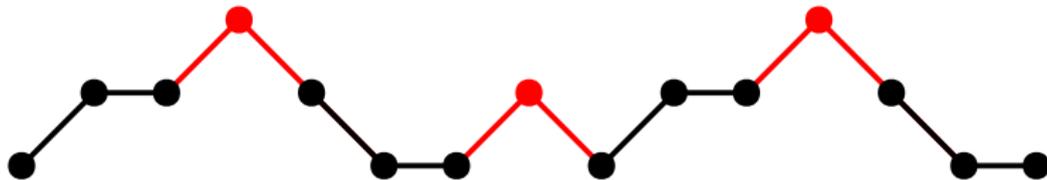
1, 1, 2, 4, 8, 17, ...?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin sans pic.



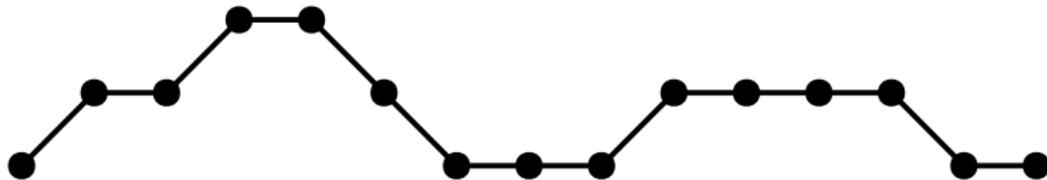
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin **sans pic**.



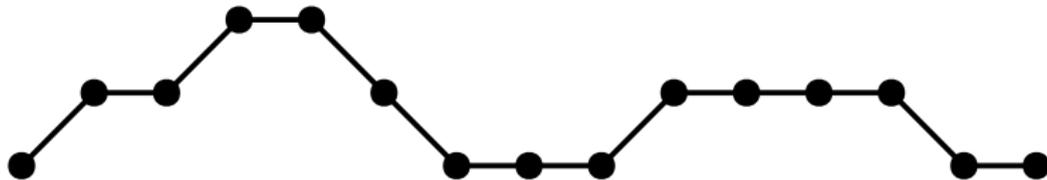
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin sans pic.



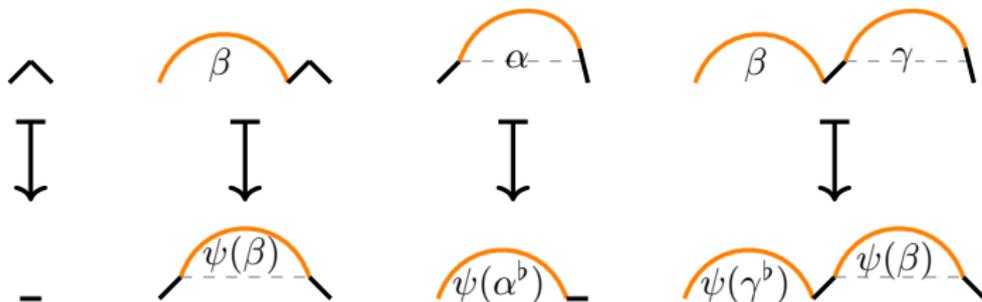
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

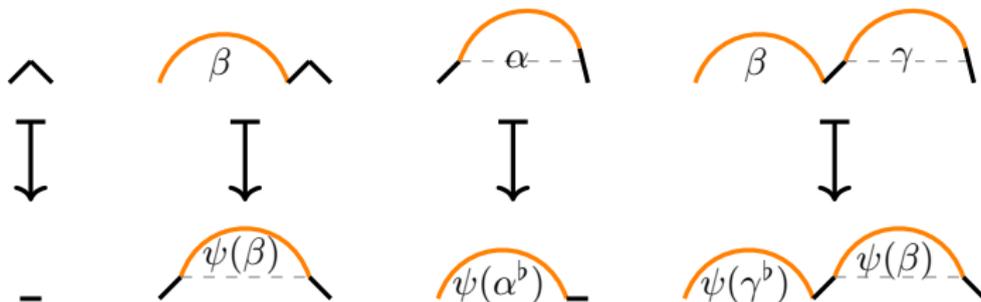
Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires : les chemins de Motzkin sans pic.



→ Cela signifie qu'il existe une bijection entre ces chemins et les cDta. ! Le mieux est d'en trouver une qui soit « élégante ».

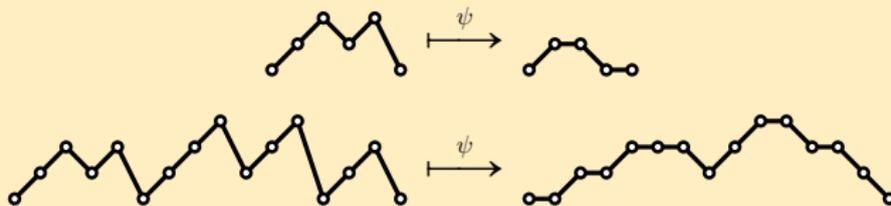
Chemins de Motzkin : [Barucci-Pinzani-Sprugnoli '91, Bernhart '99, Donaghey-Shapiro '97, Motzkin '48, Stanley '97-'99]

Exemple de bijection ψ 

Exemple de bijection ψ 

Exemple

On a :



Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

→ Série génératrice *bivariée* :

$$\sum_{n,k \geq 0} \#(\text{cDta. de taille } n \text{ avec } k \text{ occurrences de } m) \cdot x^n \cdot y^k$$

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

→ Série génératrice *bivariée* :

$$\sum_{n,k \geq 0} \#(\text{cDta. de taille } n \text{ avec } k \text{ occurrences de } m) \cdot x^n \cdot y^k$$

Exemple

Distribution du motif DU :

$$x^2 + x^3 + (y + 1)x^4 + (2y + 2)x^5 + (y^2 + 3y + 4)x^6 + \dots$$

Motifs : [Bóna '04, Bousquet-Mélou-Claesson-Dukes-Kitaev '10, Kitaev '11, Lothaire '97]

Popularité d'un motif

La **popularité** d'un motif m est une information moins précise que la distribution : ici, on s'intéresse à la série génératrice

$$\sum_{n \geq 0} \# (\text{occurrences de } m \text{ parmi } \underline{\text{tous}} \text{ les cDta. de taille } n) \cdot x^n$$

Si $m(x, y)$ est l'expression qui donne la distribution du motif m , alors la popularité de m est donnée par :

$$\partial_y (m(x, y)) \Big|_{y=1}$$

Exemple

Popularité du motif DU :

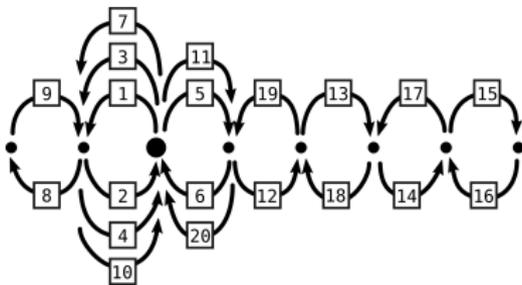
$$x^4 + 2x^5 + 5x^6 + \dots$$

Exemples de popularités étudiées

Motif	Popularité du motif dans $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 2}$	Entrée OEIS
U	1, 2, 5, 13, 32, 80, 201, 505, 1273, 3217	A110320
D	1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587	A051291
$\text{Pic} = \sum_{k \geq 1} UD_k$	1, 1, 3, 7, 16, 39, 95, 233, 577, 1436	A203611
Retour à hauteur 0	1, 1, 3, 6, 13, 29, 65, 148, 341, 793	A093128
Catastrophe	0, 1, 1, 4, 8, 19, 44, 102, 239, 563	
$\Delta_k = U^k D_k$	$0, \dots, 0, 1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587$	A051291
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ zéros}}$	
$\Delta_{\geq k} = \sum_{\ell \geq k} \Delta_\ell$	$0, \dots, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 30, 70, 167, 405$	A201631 (u_n)
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ zéros}}$	
$\Delta_{\leq k} = \sum_{1 \leq \ell \leq k} \Delta_\ell$	$\Delta_{\leq 1}$ 1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587	$u_n - u_{n-k}$
	$\Delta_{\leq 2}$ 1, 1, 2, 5, 10, 24, 47, 137, 335, 825, ...	
	$\Delta_{\leq 3}$ 1, 1, 3, 5, 12, 27, 64, 154, 375, 922, ...	
	\vdots	

A201631 ?

L'entrée A201631 de l'OEIS énumère les promenades de Fibonacci de module 2 (ou « d'angle central 180° »).



L : demi-tour dans le sens anti-horaire

R : demi-tour dans le sens horaire

→ $LLLLRRLRRLRLRLRRLRLR$. La promenade doit revenir à son point de départ, et les L doivent être isolés (sauf éventuellement au début de la promenade).

Promenades de Fibonacci : [\[Luschny '11, Wienand '11\]](#)

Lien avec les popularités

Proposition

Pour tout $k \geq 1$ et pour tout $n \geq 2$, il y a autant de promenades de Fibonacci de module 2 de longueur $2n$ qu'il y a d'occurrences des motifs $\{U^\ell D_\ell; \ell \geq k\}$ parmi tous les cDta. de taille $n + k + 1$.

Exemple ($k = 1, n = 3$)

Il y a 6 promenades de longueur 6, et il y a 6 occurrences des motifs $UD, UUD_2, UUUD_3, \dots$ parmi les cDta. de taille 5.

LLLLLL



LLLRRR



LLRRRL



LLRRRR



LRRLRR



LRRRRL



Statistiques : notations

motif $m \longrightarrow$ statistique \mathbf{m} .

$\mathbf{m}(x)$: nombre total d'occurrences du motif m dans l'objet x .

$\mathbf{m}(X)$: nombre total d'occurrences du motif m parmi les éléments de l'ensemble X (c.-à-d. popularité de m dans X).

« $f : X \longrightarrow Y$ transporte la statistique \mathbf{a} vers la statistique \mathbf{b} » :

$$\forall x \in X, \mathbf{a}(x) = \mathbf{b}(f(x)).$$

\longrightarrow On notera alors $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Statistiques : [Deutsch '99, Deutsch-Elizalde '03, Deutsch-Shapiro '01, Elizalde '11, Flajolet '80, Kostov '09, Prodinger-Wagner '07]

Statistiques : transport par ψ

Proposition

Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \geq 1$, on a :

- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} + \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{D}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{D}) = \psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UD}) = 1_{\mathbf{F}} + \mathbf{UFD} + 1_{\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{DU}) = \mathbf{UFD} + \mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UU}) = \mathbf{F} - \hat{1}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\Delta_k) = 1_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + 1_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Pic}) = \mathbf{U} + \hat{1}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Ret}) = \hat{n} - \mathbf{DerF}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{ADer}) = \mathbf{Ret}$.

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

cDta. bornés en hauteur

On contraint les cDta. à ne jamais dépasser une certaine hauteur fixée $t > 0$.

$\mathcal{T}_n^{[0,t]}$: cDta. de taille n qui ne dépassent pas la hauteur t .

La décomposition précédemment vue pour les chemis de Dyck classiques ne fonctionne pas aussi immédiatement pour ces chemins bornés. Celle des cDta. (non bornés) ne s'applique pas aussi bien non plus.

→ On va chercher à résoudre un système linéaire qui fait intervenir la série génératrice des cDta. bornés.

Notations

f_k^t : série génératrice des préfixes de cDta. bornés par t , dont le dernier pas est un pas vers le haut U , et dont la hauteur finale est k .

g_k^t : série génératrice des préfixes de cDta. bornés par t , dont le dernier pas est un pas vers le bas D_ℓ , et dont la hauteur finale est k .

→ La série génératrice des cDta. bornés par t est exactement g_0^t .

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Énumération

Proposition

La série génératrice G des gcDta. est donnée par :

$$G(x) = \frac{x((1 + 2x + 2x^2 - x^3)R + x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1)}{(1 + x + x^2)(1 - 3x + x^2)(1 + x - x^2 + R)},$$

avec $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$. Le développement de Taylor de $G(x)$ est $2x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 17x^5 + 40x^6 + 97x^7 + \dots$, et ses coefficients correspondent à l'entrée A051291 de l'OEIS.

Remarque

Nous n'avons pas trouvé de bijection entre les gcDta. et d'autres objets comptés par A051291.

gcDta. bornés

On contraint les gcDta. à ne jamais dépasser une certaine hauteur fixée $t > 0$, et à ne jamais plonger en dessous de la profondeur $-t < 0$.

$\mathcal{G}_n^{[-t,t]}$: gcDta. dont l'ordonnée reste comprise entre $-t$ et t .

De façon analogue à ce qui a été fait pour les cDta. bornés, on va poser un système linéaire qui fait intervenir la série génératrice des gcDta. bornés.

Systeme linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall -t+1 \leq k \leq t, k \neq 0, \\ \forall -t \leq k \leq t-1, \end{array} \right. \begin{array}{l} f_{-t}^t = 0 \\ f_k^t(x) = x(f_{k-1}^t(x) + g_{k-1}^t(x)) \\ f_0^t(x) = \mathbf{1} + x(f_{-1}^t(x) + g_{-1}^t(x)) \\ g_k^t(x) = x \sum_{i=k+1}^t f_i^t(x) \\ g_t^t(x) = 0 \end{array}$$

Une fois de plus, le « **1** » sert à rendre les calculs ultérieurs plus commodes. Il faudra donc en fait donner l'expression de $f_0^t(x) - \mathbf{1} + g_0^t(x)$.

2, 1, 3, 4, 5, 10, 11, 21, 27, ... ?

Entrée A122514 de l'OEIS : compositions d'entiers dont les parties ont des parités alternantes, dont la première partie est impaire, et dont la dernière partie est paire.

\mathcal{C}_n : compositions de n qui répondent aux contraintes précédentes.

Exemple

On a $(1, 2, 1, 4) \in \mathcal{C}_8$ mais $(2, 1, 4, 1) \notin \mathcal{C}_8$.

Proposition

Pour tout $n \geq 2$, il existe une bijection entre $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$ et \mathcal{C}_{n+3} .

Système linéaire et variables auxiliaires

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_0(x) & = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k(x) & = x(f_{k-1}(x) + g_{k-1}(x)) \\ \forall k \geq 0, g_k(x) & = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i}(x) + h_{k+i}(x)) \\ \forall k \geq 0, h_k(x) & = x(g_{k+1}(x) + h_{k+1}(x)) \end{array} \right.$$

Le « 1 » sert encore une fois à rendre les calculs ultérieurs plus commodes.

Système linéaire et variables auxiliaires

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k(x) = x(f_{k-1}(x) + g_{k-1}(x)) \\ \forall k \geq 0, g_k(x) = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i}(x) + h_{k+i}(x)) \\ \forall k \geq 0, h_k(x) = x(g_{k+1}(x) + h_{k+1}(x)) \end{array} \right.$$

Le « 1 » sert encore une fois à rendre les calculs ultérieurs plus commodes.

On pose $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) \cdot u^k$, $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k(x) \cdot u^k$, et $H(u) = \sum_{k \geq 0} h_k(x) \cdot u^k$, et on cherche l'expression de $G(0) + H(0)$.

Réécriture du système

$$\begin{cases} F(u) &= 1 + xu(F(u) + G(u)) \\ G(u) &= \frac{x}{1-u}(F(1) - F(u) + H(1) - H(u)) \\ H(u) &= \frac{x}{u}(H(u) - H(0) + G(u) - G(0)) \end{cases}$$

Résolution partielle :

$$F(u) = \frac{ux^2(u-x)(F(1) + H(1)) + ux^3(G(0) + H(0)) - u^2 + (x+1)u + x^2 - x}{u^3x - 2ux^3 - u^2x + x^2u - u^2 + xu + x^2 + u - x},$$

$$G(u) = -\frac{x((xu-1)(u-x)(F(1) + H(1)) + (x^2u-x)(G(0) + H(0)) + u-x)}{u^3x - 2ux^3 - u^2x + x^2u - u^2 + xu + x^2 + u - x},$$

$$H(u) = -\frac{((x^2u + (u^2 - u)x - u + 1)(G(0) + H(0)) + x(xu-1)(F(1) + H(1)) + x)x}{u^3x - 2ux^3 - u^2x + x^2u - u^2 + xu + x^2 + u - x}.$$

Méthode du noyau

Dénominateur identique entre les trois fractions. Polynôme cubique en u (de racines $s_1(x)$, $s_2(x)$, et $s_3(x)$). Deux des trois racines (s_2 et s_3) possèdent un développement de Taylor en $x = 0$, l'autre (s_1) non. D'après la méthode du noyau, on peut simplifier le dénominateur **et le numérateur** de chaque fraction par $(u - s_2(x)) \cdot (u - s_3(x))$, ce qui permet d'obtenir de nouvelles équations pour trouver les conditions initiales.

Tableau des premières valeurs de ω

n	α	$\omega(\alpha)$
2	UD	ϵ
3	UUD_2	(1)
4	$UUUD_3$	(1, 1)
	$UUDL$	(2)
5	$UUUUD_4$	(1, 1, 1)
	$UUUD_2L$	(3)
6	$UUUUUD_5$	(1, 1, 1, 1)
	$UUUUUD_3L$	(1, 2, 1)
	$UUUDLD$	(2, 2)
7	$UUUUUUD_6$	(1, 1, 1, 1, 1)
	$UUUUUD_4L$	(1, 3, 1)
	$UUUUDLD_2$	(2, 1, 2)
	$UUUUD_2LD$	(5)

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

