

Combinatoire énumérative et bijective de différentes familles de chemins de Dyck avec trous d'air

Jean-Luc Baril, Sergey Kirgizov, Rémi Maréchal, Helmut Prodinger, Vincent Vajnovszki

Université de Bourgogne (LIB, CombNet),
Université de Caen-Normandie (GREYC, AMACC)

19 novembre 2024



Sommaire

- 1** Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2** Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3** Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4** Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5** Directions de recherche

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Objets combinatoires

Grossièrement : objets mathématiques répondant à une certaine définition, et qui forment des ensembles **finis**. Généralement, on range dans un même ensemble les objets qui ont la même « taille ».

Exemple

*Un **mot binaire** est une suite finie de 0 et de 1. La taille d'un mot binaire est le nombre de chiffres qui le compose. Pour tout $n \geq 0$, on note \mathcal{B}_n l'ensemble des mots binaires de taille n .*

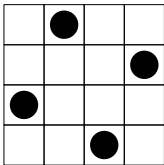
On a par exemple :

$$100101110 \in \mathcal{B}_9.$$

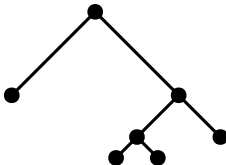
Combinatoire générale : [Knuth '73, Stanley '97-'99]

Autres exemples d'objets combinatoires

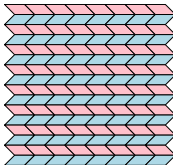
Permutations :



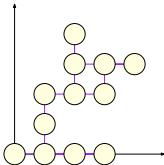
Graphes :



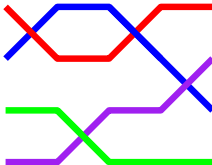
Pavages :



Animaux :



Tresses :



et cætera!

...

Énumérer ?

Combien existe-t-il de mots binaires de taille n ?

→ 2 choix pour le premier chiffre, 2 choix pour le deuxième, etc.

Proposition

Pour tout n , il y a

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2,}_{n \text{ fois}}$$

soit 2^n mots binaires de taille n . Autrement dit :

$$\forall n \geq 0, |\mathcal{B}_n| = 2^n.$$

Suite énumérative pour les mots binaires :

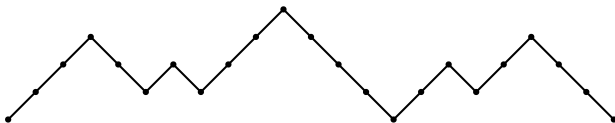
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

(puissances de 2)

Chemins de Dyck (classiques)

Chemins composés de pas vers le haut et vers le bas, obéissant aux règles suivantes :

- ils restent confinés dans le quadrant Nord-Est du réseau \mathbb{Z}^2 ;
- ils commencent à l'origine de \mathbb{Z}^2 ;
- ils finissent sur l'axe des abscisses.



Énumération moins immédiate que celle des mots binaires...

Combinatoire de chemins : [Asinowski-Banderier-Roitner '20,
Banderier-Bousquet-Mélou-Denise-Flajolet '02, Banderier-Flajolet '02,
Banderier-Wallner '17, Bousquet-Mélou-Mishna '10, Humphreys '10,
Kauers-Yatchak '15, Kurkova-Raschel '12]
Chemins de Dyck : [Stanley '97-'99-'15]

Notations et outils

\mathcal{D}_n : chemins de Dyck de taille n (c.-à-d. à n pas)

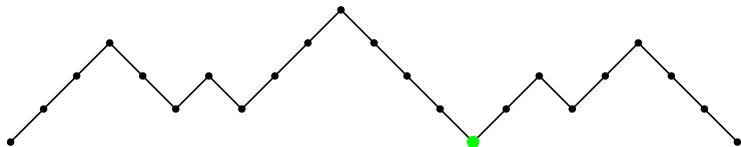
D : série génératrice des chemins de Dyck, c.-à-d. :

$$D(x) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{D}_n| \cdot x^n$$

On n'arrive pas à trouver $|\mathcal{D}_n|$ directement. . .

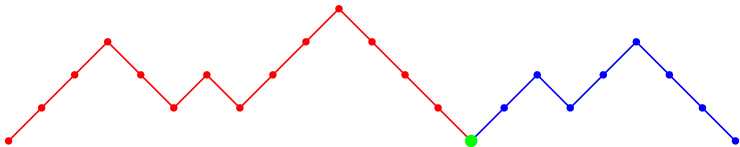
→ Cherchons l'expression de $D(x)$, qui contient la même information.

Décomposition des chemins de Dyck



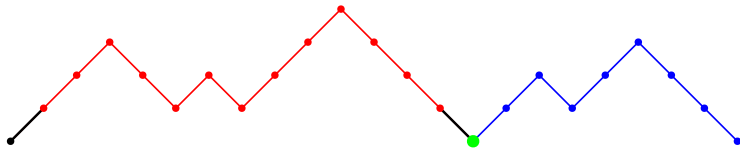
On peut toujours couper un chemin de Dyck (non vide) au moment où il retombe à hauteur 0 pour la première fois.

Décomposition des chemins de Dyck



Cela donne une moitié **gauche**, qui est un chemin de Dyck qui ne retombe à hauteur 0 qu'à la fin, et une moitié **droite**, qui est un chemin de Dyck générique (éventuellement vide).

Décomposition des chemins de Dyck



En mettant à part les deux pas extrêmes de la moitié **gauche**, il reste entre eux un chemin de Dyck générique (éventuellement vide).
Finalement, cela se traduit par l'équation suivante :

$$D(x) = 1 + \underbrace{x^2}_{\text{pas noirs}} \cdot \underbrace{D(x)}_{\text{gauche}} \cdot \underbrace{D(x)}_{\text{droite}}.$$

Énumération

Après résolution, l'équation donne :

$$D(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2},$$

mais seule la solution avec un signe « - » a du sens.

Proposition

On a :

$$D(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2} = 1 + x^2 + 2x^4 + 5x^6 + 14x^8 + 42x^{10} + \dots$$

Suite énumérative pour les chemins de Dyck :

1, 1, 2, 5, 14, 42, ...

(nombres de Catalan)

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Sommaire

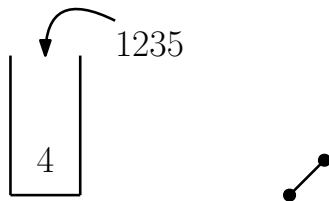
- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Motivation : tri à pile



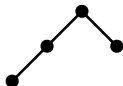
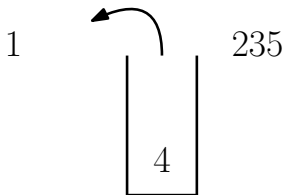
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



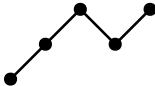
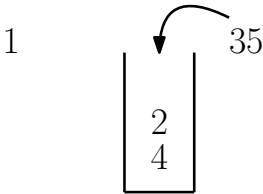
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



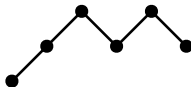
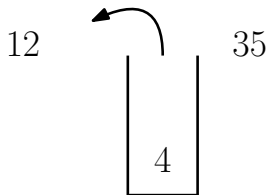
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



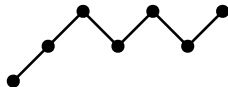
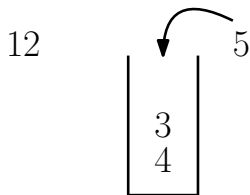
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



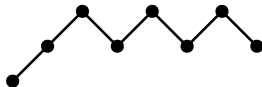
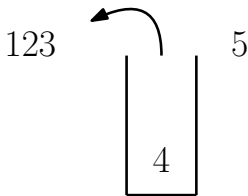
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



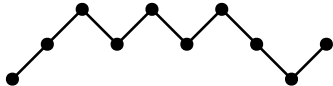
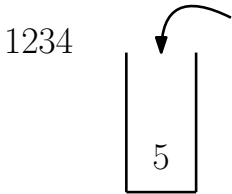
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



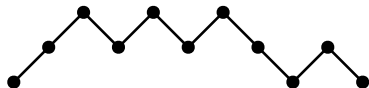
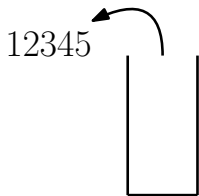
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



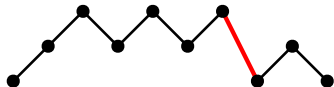
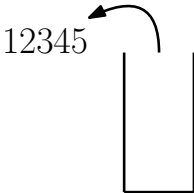
Tris à pile : [Knuth '73, Krattenthaler '01]

Motivation : tri à pile



Tris à pile : [\[Knuth '73, Krattenthaler '01\]](#)

Motivation : tri à pile



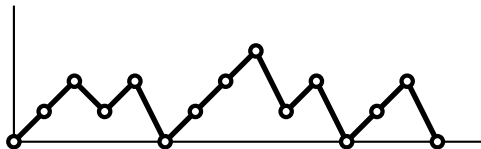
→ Idée : condenser les dépilements successifs en **une seule étape**.

Tris à pile : **[Knuth '73, Krattenthaler '01]**

Définition

Un cDta. est un chemin **non vide** composé de pas vers le haut $U = (1, 1)$ et de pas vers le bas $D_k = (1, -k)$ (où $k \geq 1$), obéissant aux règles suivantes :

- il reste confiné dans le quadrant Nord-Est du réseau \mathbb{Z}^2 ;
- il commence à l'origine de \mathbb{Z}^2 ;
- il finit sur l'axe des abscisses ;
- il ne contient jamais deux pas vers le bas consécutifs.

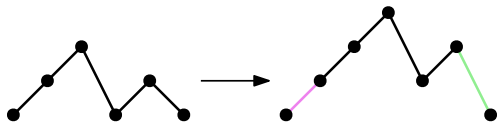


Chemins avec catastrophes : [Banderier-Wallner '17]

Quelques notations

$\alpha^\#$: « monté » du cDta. α

On ajoute U au début du chemin, et on change le dernier pas D_k du chemin en D_{k+1} .



Le monté du cDta. UUD_2UD est $UUUD_2UD_2$.

α^\flat : « baissé » du cDta. α

Il s'agit de l'opération inverse (le baissé de $UUUD_2UD_2$ est UUD_2UD).

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

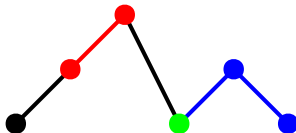
Énumérer les cDta.

\mathcal{T}_n : cDta. de taille n (c.-à-d. à n pas)

T : série génératrice des cDta., c.-à-d. :

$$T(x) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{T}_n| \cdot x^n$$

La décomposition précédente des chemins de Dyck classiques ne fonctionne pas aussi immédiatement pour les cDta. :



U n'est pas un cDta. !

→ Il faut introduire différents cas de figure.

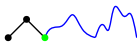
Décomposition des cDta.

Cas (i) : UD



Contribution : x^2

Cas (ii) : $UD \cdot \beta$



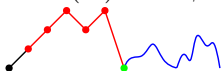
Contribution : $x^2 \cdot T(x)$

Cas (iii) : $\alpha^\#$



Contribution : $x \cdot T(x)$

Cas (iv) : $\alpha^\# \cdot \beta$



Contribution : $x \cdot T(x) \cdot T(x)$

Série génératrice des cDta.

On a donc :

$$T(x) = x^2 + x^2 \cdot T(x) + x \cdot T(x) + x \cdot T(x)^2.$$

Proposition

On a :

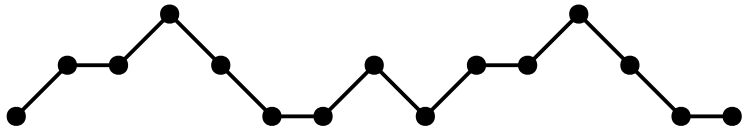
$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{2x} \\ &= x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 17x^7 + \dots \end{aligned}$$

Suite énumérative pour les cDta. :

1, 1, 2, 4, 8, 17, ...
(nombres de Catalan généralisés, OEIS A004148)

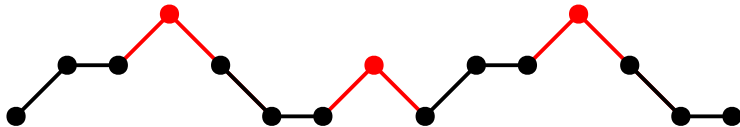
1, 1, 2, 4, 8, 17, ...?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin sans pic.



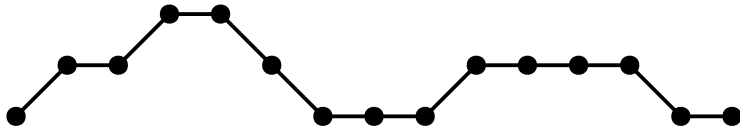
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin **sans pic**.



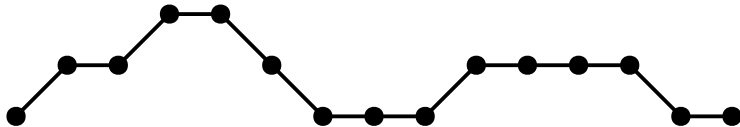
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires :
les chemins de Motzkin sans pic.



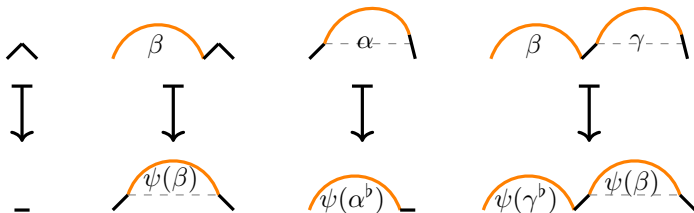
1, 1, 2, 4, 8, 17, ... ?

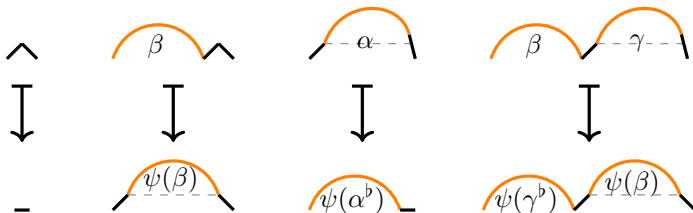
Cette même suite énumère une autre famille d'objets combinatoires : les chemins de Motzkin sans pic.



→ Cela signifie qu'il existe une bijection entre ces chemins et les cDta. ! Le mieux est d'en trouver une qui soit « élégante ».

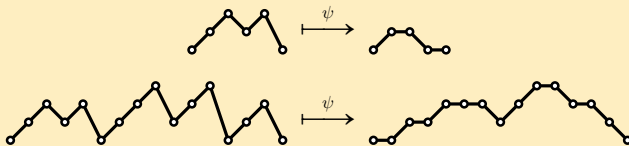
Chemins de Motzkin : [Barucci-Pinzani-Sprugnoli '91, Bernhart '99, Donaghey-Shapiro '97, Motzkin '48, Stanley '97-'99]

Exemple de bijection ψ 

Exemple de bijection ψ 

Exemple

On a :



Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

→ Série génératrice *bivariée* :

$$\sum_{n,k \geq 0} \#(\text{cDta. de taille } n \text{ avec } k \text{ occurrences de } m) \cdot x^n \cdot y^k$$

Motifs dans les cDta.

Dans ce contexte, un motif est une suite consécutive de pas.

Exemple

Le cDta. $UDUUDUD_2$ *contient* le motif UUD , mais *évite* D_{42} .

→ Série génératrice *bivariée* :

$$\sum_{n,k \geq 0} \#(\text{cDta. de taille } n \text{ avec } k \text{ occurrences de } m) \cdot x^n \cdot y^k$$

Exemple

Distribution du motif DU :

$$x^2 + x^3 + (y + 1)x^4 + (2y + 2)x^5 + (y^2 + 3y + 4)x^6 + \dots$$

Motifs : [Bóna '04, Bousquet-Mélou-Claesson-Dukes-Kitaev '10, Kitaev '11, Lothaire '97]

Popularité d'un motif

La **popularité** d'un motif m est une information moins précise que la distribution : ici, on s'intéresse à la série génératrice

$$\sum_{n \geq 0} \# (\text{occurrences de } m \text{ parmi tous les cDta. de taille } n) \cdot x^n$$

Si $m(x, y)$ est l'expression qui donne la distribution du motif m , alors la popularité de m est donnée par :

$$\partial_y (m(x, y)) \Big|_{y=1}$$

Exemple

Popularité du motif DU :

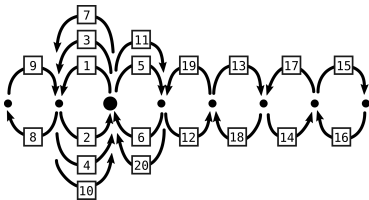
$$x^4 + 2x^5 + 5x^6 + \dots$$

Exemples de popularités étudiées

Motif	Popularité du motif dans $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 2}$	Entrée OEIS
U	1, 2, 5, 13, 32, 80, 201, 505, 1273, 3217	A110320
D	1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587	A051291
$\text{Pic} = \sum_{k \geq 1} UD_k$	1, 1, 3, 7, 16, 39, 95, 233, 577, 1436	A203611
Retour à hauteur 0	1, 1, 3, 6, 13, 29, 65, 148, 341, 793	A093128
Catastrophe	0, 1, 1, 4, 8, 19, 44, 102, 239, 563	
$\Delta_k = U^k D_k$	$0, \dots, 0, 1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587$	A051291
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ zéros}}$	
$\Delta_{\geq k} = \sum_{\ell \geq k} \Delta_\ell$	$0, \dots, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 30, 70, 167, 405$	A201631 (u_n)
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ zéros}}$	
$\Delta_{\leq k} = \sum_{1 \leq \ell \leq k} \Delta_\ell$	$\Delta_{\leq 1}$ 1, 0, 2, 3, 7, 17, 40, 97, 238, 587	$u_n - u_{n-k}$
	$\Delta_{\leq 2}$ 1, 1, 2, 5, 10, 24, 47, 137, 335, 825, ...	
	$\Delta_{\leq 3}$ 1, 1, 3, 5, 12, 27, 64, 154, 375, 922, ...	
	⋮	

A201631 ?

L'entrée A201631 de l'OEIS énumère les promenades de Fibonacci de module 2 (ou « d'angle central 180° »).



L : demi-tour dans le sens anti-horaire

R : demi-tour dans le sens horaire

→ $LLLLRRLRRLRLRLRRLRLR$. La promenade doit revenir à son point de départ, et les L doivent être isolés (sauf éventuellement au début de la promenade).

Promenades de Fibonacci : [\[Luschny '11, Wienand '11\]](#)

Lien avec les popularités

Proposition

Pour tout $k \geq 1$ et pour tout $n \geq 2$, il y a autant de promenades de Fibonacci de module 2 de longueur $2n$ qu'il y a d'occurrences des motifs $\{U^\ell D_\ell; \ell \geq k\}$ parmi tous les cDta. de taille $n + k + 1$.

Exemple ($k = 1, n = 3$)

Il y a 6 promenades de longueur 6, et il y a 6 occurrences des motifs $UD, UUD_2, UUUD_3, \dots$ parmi les cDta. de taille 5.

LLLLLL



LLLLRR



LLLRRL



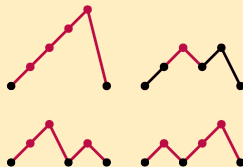
LLRRRR



LRRLRR



LRRRRL



Statistiques : notations

motif $m \longrightarrow$ statistique \mathbf{m} .

$\mathbf{m}(x)$: nombre total d'occurrences du motif m dans l'objet x .

$\mathbf{m}(X)$: nombre total d'occurrences du motif m parmi les éléments de l'ensemble X (c.-à-d. popularité de m dans X).

« $f : X \longrightarrow Y$ transporte la statistique \mathbf{a} vers la statistique \mathbf{b} » :

$$\forall x \in X, \mathbf{a}(x) = \mathbf{b}(f(x)).$$

\longrightarrow On notera alors $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Statistiques : [Deutsch '99, Deutsch-Elizalde '03, Deutsch-Shapiro '01, Elizalde '11, Flajolet '80, Kostov '09, Prodinger-Wagner '07]

Statistiques : transport par ψ

Proposition

Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \geq 1$, on a :

- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} + \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{D}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{D}) = \psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UD}) = 1_{\mathbf{F}} + \mathbf{UFD} + 1_{\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{DU}) = \mathbf{UFD} + \mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UU}) = \mathbf{F} - \hat{1}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\Delta_k) = 1_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + 1_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Pic}) = \mathbf{U} + \hat{1}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Ret}) = \hat{n} - \mathbf{DerF}$;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{ADer}) = \mathbf{Ret}$.

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

cDta. bornés en hauteur

On contraint les cDta. à ne jamais dépasser une certaine hauteur fixée $t > 0$.

$\mathcal{T}_n^{[0,t]}$: cDta. de taille n qui ne dépassent pas la hauteur t .

La décomposition précédemment vue pour les chemis de Dyck classiques ne fonctionne pas aussi immédiatement pour ces chemins bornés. Celle des cDta. (non bornés) ne s'applique pas aussi bien non plus.

→ On va chercher à résoudre un système linéaire qui fait intervenir la série génératrice des cDta. bornés.

Notations

f_k^t : série génératrice des préfixes de cDta. bornés par t , dont le dernier pas est un pas vers le haut U , et dont la hauteur finale est k .

g_k^t : série génératrice des préfixes de cDta. bornés par t , dont le dernier pas est un pas vers le bas D_ℓ , et dont la hauteur finale est k .

→ La série génératrice des cDta. bornés par t est exactement g_0^t .

Système linéaire

Autres récurrences :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq k \leq t, \\ \forall 0 \leq k \leq t-1, \end{array} \begin{array}{l} f_0^t(x) = 1 \\ f_k^t(x) = x \cdot (f_{k-1}^t(x) + g_{k-1}^t(x)) \\ g_k^t(x) = x \cdot \sum_{i=k+1}^t f_i^t(x) \\ g_t^t(x) = 0 \end{array} \right.$$

Le « 1 » sert à rendre les calculs ultérieurs plus commodes.

Résultats pour $t = 1, \dots, 4$

Proposition

On a :

$$g_0^1 = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \dots$$

$$g_0^2 = \frac{x^2(1+x-x^2)}{x^4-x^3-2x^2+1} = x^2 + x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6 + 6x^7 + 6x^8 + 11x^9 + 16x^{10} + \dots$$

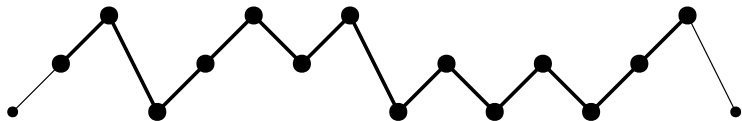
$$g_0^3 = \frac{x^2(x^4-2x^3-x^2+x+1)}{(x^3-2x^2-x+1)(1+x-x^3)}$$

$$= x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 7x^6 + 9x^7 + 22x^8 + 32x^9 + 66x^{10} + \dots$$

$$g_0^4 = \frac{-x^8+3x^7-3x^5-2x^4+x^3+x^2}{x^8-3x^7-x^6+5x^5+4x^4-3x^3-4x^2+1}$$

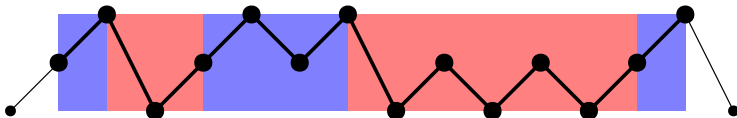
$$= x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 7x^6 + 16x^7 + 27x^8 + 63x^9 + 112x^{10} + \dots$$

Exemple de bijection \mathcal{V}



On fixe un cDta. ne dépassant pas la hauteur 2, et on met de côté ses deux pas extrêmes.

Exemple de bijection \mathcal{V}



On fixe un cDta. ne dépassant pas la hauteur 2, et on met de côté ses deux pas extrêmes. On découpe ce qui reste en blocs ; on place les coupures entre deux blocs consécutifs au milieu de chaque occurrence des motifs UU et UD_2 .

Sommaire

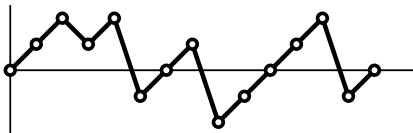
- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche

Définition

Un gcDta. est un chemin **non vide** composé de pas vers le haut $U = (1, 1)$ et de pas vers le bas $D_k = (1, -k)$ (où $k \geq 1$), obéissant aux règles suivantes :

- il reste confiné dans la moitié Est du réseau \mathbb{Z}^2 ;
- il commence à l'origine de \mathbb{Z}^2 ;
- il finit sur l'axe des abscisses ;
- il ne contient jamais deux pas vers le bas consécutifs.

En somme, c'est un cDta. qui a le droit de passer sous l'axe des abscisses.



Énumération

Proposition

La série génératrice G des gcDta. est donnée par :

$$G(x) = \frac{x((1 + 2x + 2x^2 - x^3)R + x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1)}{(1 + x + x^2)(1 - 3x + x^2)(1 + x - x^2 + R)},$$

avec $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$. Le développement de Taylor de $G(x)$ est $2x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 17x^5 + 40x^6 + 97x^7 + \dots$, et ses coefficients correspondent à l'entrée A051291 de l'OEIS.

Remarque

Nous n'avons pas trouvé de bijection entre les gcDta. et d'autres objets comptés par A051291.

gcDta. bornés

On contraint les gcDta. à ne jamais dépasser une certaine hauteur fixée $t > 0$, et à ne jamais plonger en dessous de la profondeur $-t < 0$.

$\mathcal{G}_n^{[-t,t]}$: gcDta. dont l'ordonnée reste comprise entre $-t$ et t .

De façon analogue à ce qui a été fait pour les cDta. bornés, on va poser un système linéaire qui fait intervenir la série génératrice des gcDta. bornés.

Systeme linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall -t+1 \leq k \leq t, k \neq 0, \\ \forall -t \leq k \leq t-1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f_{-t}^t = 0 \\ f_k^t(x) = x(f_{k-1}^t(x) + g_{k-1}^t(x)) \\ f_0^t(x) = \mathbf{1} + x(f_{-1}^t(x) + g_{-1}^t(x)) \\ g_k^t(x) = x \sum_{i=k+1}^t f_i^t(x) \\ g_t^t(x) = 0 \end{array}$$

Une fois de plus, le « **1** » sert à rendre les calculs ultérieurs plus commodes. Il faudra donc en fait donner l'expression de $f_0^t(x) - \mathbf{1} + g_0^t(x)$.

Résultats pour $t = 1, 2, 3$

Proposition

On a :

$$f_0^1 - 1 + g_0^1 = \frac{x^2(2+x-x^2)}{x^4-x^3-2x^2+1}$$

$$= 2x^2+x^3+3x^4+4x^5+5x^6+10x^7+11x^8+21x^9+27x^{10}+\dots$$

$$f_0^2 - 1 + g_0^2 = \frac{x^2(x^2-x-1)(2+3x+x^2-x^3)}{x^7-2x^6-3x^5+2x^4+6x^3+3x^2-x-1}$$

$$= 2x^2+3x^3+5x^4+13x^5+22x^6+48x^7+93x^8+190x^9+375x^{10}+\dots$$

$$f_0^3 - 1 + g_0^3 = \frac{x^2(1-x)(1+2x+x^2-x^3)(2+x-4x^2-4x^3+x^4+3x^5-x^6)}{x^{12}-5x^{11}+4x^{10}+10x^9-4x^8-19x^7-4x^6+17x^5+11x^4-5x^3-6x^2+1}$$

$$= 2x^2+3x^3+7x^4+15x^5+36x^6+75x^7+176x^8+386x^9+869x^{10}+\dots$$

2, 1, 3, 4, 5, 10, 11, 21, 27, ... ?

Entrée A122514 de l'OEIS : compositions d'entiers dont les parties ont des parités alternantes, dont la première partie est impaire, et dont la dernière partie est paire.

\mathcal{C}_n : compositions de n qui répondent aux contraintes précédentes.

Exemple

On a $(1, 2, 1, 4) \in \mathcal{C}_8$ mais $(2, 1, 4, 1) \notin \mathcal{C}_8$.

Proposition

Pour tout $n \geq 2$, il existe une bijection entre $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$ et \mathcal{C}_{n+3} .

Exemple de bijection ξ

On fixe un élément de $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$, que l'on découpe en blocs selon les occurrences des motifs UU et UD_2 . On note les blocs B_1, B_2, \dots, B_r .

Exemple de bijection ξ

On fixe un élément de $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$, que l'on découpe en blocs selon les occurrences des motifs UU et UD_2 . On note les blocs B_1, B_2, \dots, B_r . On considère l'opération ς suivante :

$$\varsigma(x_r, \dots, x_1) = \begin{cases} (x_r + 1, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 + 2) & x_{r-1} \text{ et } x_1 \text{ pairs} \\ (x_r + 1, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1, 2) & x_{r-1} \text{ pair, } x_1 \text{ impair} \\ (1, x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 + 2) & x_{r-1} \text{ impair, } x_1 \text{ pair} \\ (1, x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1, 2) & x_{r-1} \text{ et } x_1 \text{ impairs} \end{cases}$$

et on pose $\xi(B_1 B_2 \dots B_r) := \varsigma(|B_r|, |B_{r-1}|, \dots, |B_1|)$.

Exemple

On a :

$$\mathcal{G}_{15}^{[-1,1]} \ni UD_2 UUDUD_2 UDUDUUD \xrightarrow{\xi} (3, 6, 3, 2, 1, 2) \in \mathcal{C}_{18}.$$

Sommaire

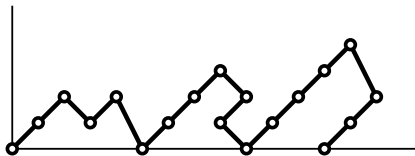
- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air**
- 5 Directions de recherche

Définition

Un cDota. est un chemin **non vide** composé de pas vers le haut $U = (1, 1)$, de pas vers le bas $D_k = (1, -k)$ (où $k \geq 1$), et de pas vers la gauche $L = (-1, -1)$, obéissant aux règles suivantes :

- il reste confiné dans le quadrant Nord-Est du réseau \mathbb{Z}^2 ;
- il commence à l'origine de \mathbb{Z}^2 ;
- il finit sur l'axe des abscisses ;
- il ne contient jamais deux pas vers le bas consécutifs ;
- les motifs LU et UL n'apparaissent jamais.

En somme, c'est un cDta. qui dispose d'un troisième type de pas.



Notations

f_k : série génératrice des préfixes de cDota. dont le dernier pas est un pas vers le haut U , et dont la hauteur finale est k .

g_k : série génératrice des préfixes de cDota., dont le dernier pas est un pas vers le bas D_ℓ , et dont la hauteur finale est k .

h_k : série génératrice des préfixes de cDota., dont le dernier pas est un pas vers la gauche L , et dont la hauteur finale est k .

→ La série génératrice des cDota. est exactement $g_0 + h_0$. Cette fois-ci, le système linéaire vérifié par ces séries génératrices aura un nombre infini d'équations. Pas de résolution matricielle, donc...

Système linéaire et variables auxiliaires

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k(x) = x(f_{k-1}(x) + g_{k-1}(x)) \\ \forall k \geq 0, g_k(x) = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i}(x) + h_{k+i}(x)) \\ \forall k \geq 0, h_k(x) = x(g_{k+1}(x) + h_{k+1}(x)) \end{array} \right.$$

Le « 1 » sert encore une fois à rendre les calculs ultérieurs plus commodes.

Système linéaire et variables auxiliaires

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k(x) = x(f_{k-1}(x) + g_{k-1}(x)) \\ \forall k \geq 0, g_k(x) = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i}(x) + h_{k+i}(x)) \\ \forall k \geq 0, h_k(x) = x(g_{k+1}(x) + h_{k+1}(x)) \end{array} \right.$$

Le « 1 » sert encore une fois à rendre les calculs ultérieurs plus commodes.

On pose $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) \cdot u^k$, $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k(x) \cdot u^k$, et $H(u) = \sum_{k \geq 0} h_k(x) \cdot u^k$, et on cherche l'expression de $G(0) + H(0)$.

Réécriture du système

$$\begin{cases} F(u) &= 1 + xu(F(u) + G(u)) \\ G(u) &= \frac{x}{1-u}(F(1) - F(u) + H(1) - H(u)) \\ H(u) &= \frac{x}{u}(H(u) - H(0) + G(u) - G(0)) \end{cases}$$

Méthode du noyau

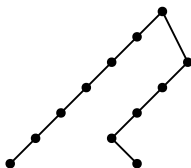
Dénominateur identique entre les trois fractions. Polynôme cubique en u (de racines $s_1(x)$, $s_2(x)$, et $s_3(x)$). Deux des trois racines (s_2 et s_3) possèdent un développement de Taylor en $x = 0$, l'autre (s_1) non.

Méthode du noyau

Dénominateur identique entre les trois fractions. Polynôme cubique en u (de racines $s_1(x)$, $s_2(x)$, et $s_3(x)$). Deux des trois racines (s_2 et s_3) possèdent un développement de Taylor en $x = 0$, l'autre (s_1) non. D'après la méthode du noyau, on peut simplifier le dénominateur **et le numérateur** de chaque fraction par $(u - s_2(x)) \cdot (u - s_3(x))$, ce qui permet d'obtenir de nouvelles équations pour trouver les conditions initiales.

Sous-ensembles des cDota.

« cDota. sans vallée » : cDota. qui évite le motif $D_k U$ pour tout $k \geq 1$.



« cDota. sans vallée en zigzag » : cDota. sans vallée qui évite le motif LL .

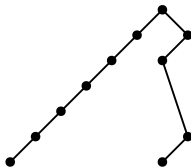
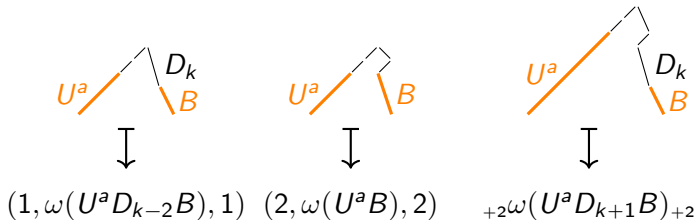


Tableau des premières valeurs de χ

n	α	$\chi(\alpha)$
1	U	ε
2	UD	0
	UU	1
3	UUD	01
	UUD_2	10
	UUU	11
4	$UUDL$	010
	$UUUD$	011
	$UUUD_2$	101
	$UUUD_3$	110
	$UUUU$	111

Exemple II de bijection ω

On pose $\omega(UD) = \varepsilon$, $\omega(U^2D_2) = (1)$, $\omega(U^2DL) = (2)$, et $\omega(U^3D_2L) = (3)$, puis on finit de définir ω comme suit :



Ici, on définit la notation ${}_+2(\bullet) {}_+2$ de la manière suivante :

$${}_+2(x_1) {}_+2 := (x_1 + 4)$$

$${}_+2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) {}_+2 := \left((x_1 + 2), x_2, \dots, x_{n-1}, (x_n + 2) \right)$$

Tableau des premières valeurs de ω

n	α	$\omega(\alpha)$
2	UD	ϵ
3	UUD_2	(1)
4	$UUUD_3$	(1, 1)
	$UUDL$	(2)
5	$UUUUD_4$	(1, 1, 1)
	$UUUD_2L$	(3)
6	$UUUUUD_5$	(1, 1, 1, 1)
	$UUUUUD_3L$	(1, 2, 1)
	$UUUDLD$	(2, 2)
7	$UUUUUUD_6$	(1, 1, 1, 1, 1)
	$UUUUUD_4L$	(1, 3, 1)
	$UUUUUDLD_2$	(2, 1, 2)
	$UUUUUD_2LD$	(5)

Sommaire

- 1 Un brève introduction à la combinatoire énumérative
- 2 Chemins de Dyck avec trous d'air
 - Motivation
 - Énumération
 - Motifs et statistiques
 - Exemple de sous-ensemble
- 3 Grands chemins de Dyck avec trous d'air
- 4 Chemins de Dyck obliques avec trous d'air
- 5 Directions de recherche**

Quelques questions à explorer

- Génération aléatoire uniforme des cDta.
- Génération exhaustive efficace des cDta.
- Calcul algorithmique de la série génératrice des cDta. qui évitent un motif donné
- Établir davantage de bijections entre les chemins à trous d'air et d'autres objets combinatoires
- Structure de treillis?

Quelques questions à explorer

- Génération aléatoire uniforme des cDta.
- Génération exhaustive efficace des cDta.
- Calcul algorithmique de la série génératrice des cDta. qui évitent un motif donné
- Établir davantage de bijections entre les chemins à trous d'air et d'autres objets combinatoires
- Structure de treillis ?

Merci !