



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉTABLISSEMENT  
UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ  
PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE**

École doctorale n° 37  
Sciences Physiques pour l'Ingénieur et Microtechniques

Doctorat d'informatique

par  
M. Maréchal, Rémi

Combinatoire énumérative et bijective de différentes familles de chemins de Dyck  
avec trous d'air

Version de diffusion

Thèse présentée et soutenue à Dijon, le 11 octobre 2024

Composition du Jury :

M. Kheddouci, Hamamache	Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1	Président, Rapporteur
M. Ravelomanana, Vlady	Professeur à l'Université Paris Cité	Rapporteur
M. Courtiel, Julien	Maître de conférences à l'Université de Caen Normandie	Examineur
Mme. Duchi, Enrica	Maîtresse de conférences – HDR – à l'Université Paris Cité	Examinatrice
M. Naima, Mehdi	Maître de conférences à Sorbonne Université	Examineur
M. Baril, Jean-Luc	Professeur à l'Université de Bourgogne	Co-directeur de thèse
M. Vajnovszki, Vincent	Professeur à l'Université de Bourgogne	Co-directeur de thèse
M. Kirgizov, Sergey	Maître de conférences à l'Université de Bourgogne	Co-encadrant de thèse

### Version de diffusion

---

La présente version est conforme à celle de soutenance, les seules modifications apportées à la partie principale du document étant des corrections orthographiques mineures, ainsi qu'une coquille dans le numéro de la proposition qui apparaît dans la figure C.1.

---

---

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Informatique de Bourgogne (EA 7534).

**Adresse postale du laboratoire :**

Laboratoire d'Informatique de Bourgogne (EA 7534)

Université de Bourgogne

UFR Sciences et Techniques

Aile des Sciences de l'Ingénieur (Bâtiment ESIREM)

9 avenue Alain Savary

BP 47870

21078 DIJON CEDEX

FRANCE

**Tél :** + 33 (0)3 80 39 58 83

---

**Titre :** Combinatoire énumérative et bijective de différentes familles de chemins de Dyck avec trous d'air

**Mots clefs :** Motifs dans les structures discrètes; Statistiques combinatoires; Chemins sur réseau; Séries génératrices

**Résumé :** Les travaux de recherche consisteront principalement en une étude théorique dans le domaine de la combinatoire des chemins sur réseau. Nous voulons obtenir de nouveaux résultats concernant la distribution du nombre de motifs et leur popularité sur les chemins sur réseau. Les techniques utilisées seront par exemple la description récursive, les fonctions génératrices (bivariées), caractérisation structurale et l'analyse asymptotique. On établira également des correspondances bijectives avec d'autres classes d'objets dont les propriétés sont plus connues, ce qui permettra d'établir des

ressemblances et des transports de motifs sur différentes classes d'objets. En particulier, on cherchera à introduire de nouveaux chemins sur réseau, puis on tentera de les relier à des suites énumératives ou à d'autres familles d'objets combinatoires déjà référencées dans la littérature, autant que faire se peut. Pouvoir mettre ces nouveaux chemins en relation avec d'autres objets est une manière d'attester leur pertinence dans le paysage combinatoire, et permet dans le même temps d'élargir le champ des sujets de recherche dans le domaine.

**Title:** Enumerative and bijective combinatorics of different families of Dyck paths with air pockets

**Keywords:** Patterns in discrete structures; Combinatorial statistics; Lattice paths; Generating functions

**Abstract:** The research will mainly consist of a theoretical study in combinatorics on lattice paths. We expect to obtain new results on the distribution of pattern frequency and popularity over lattice paths. We will consider techniques such as recursive description, (bivariate) generating functions, structural characterization, and asymptotic analysis. Also, we will determine one-to-one correspondences with other more classical combinatorial classes, which will enable us to find similarities and

transport patterns over various combinatorial objects. In particular, we will seek to introduce new lattice paths, and then we will try to relate them to enumerative sequences or other combinatorial object families that are already listed in the literature, insofar as possible. Succeeding in connecting these new paths with other objects is a way of showing their relevance within the landscape of combinatorics, and enables the expansion of the scope of research topics in that domain.



# Préface

Les travaux menés lors de cette thèse s’inscrivent dans le domaine de la combinatoire, en introduisant une nouvelle famille de chemins sur réseau. Ensuite, une étude est menée sur l’énumération de cette famille et sur la distribution et la popularité de divers motifs, ce qui donne lieu à des bijections avec divers objets combinatoires déjà connus. Enfin, on étudie sous un prisme similaire des variantes de cette famille, ce qui donne également lieu à des résultats originaux.

Cette thèse n’aurait sans doute pas pu voir le jour sans les travaux préexistants sur l’étude combinatoire des chemins sur réseau, menée par exemple par [5, 29, 56, 61, 67, 73]. À leur tour, les travaux effectués durant cette thèse ont pu être cités et ont donné naissance à certains articles [7, 9, 10, 64, 65], ou ont inspiré certaines discussions [45].

## Remerciements

Je tiens à remercier de la façon la plus sincère qui soit un certain nombre de personnes, sans qui cette thèse n’aurait pas pu être ce qu’elle est.

En premier lieu, il me semble naturel d’adresser un mot à mes (co-)directeurs de thèse Jean-Luc BARIL, Sergey KIRGIZOV, et Vincent VAJNOVSZKI. C’est de leurs têtes qu’est né le sujet qui m’a été confié, et c’est leur soutien indéfectible qui a su me guider à travers mes trois années de doctorat. Je tiens non seulement à souligner leur expertise scientifique, mais également leur amicalité et leur bienveillance envers moi. Sans le côté informel qu’a pu revêtir la plupart de nos échanges, mon épanouissement au cours de ces trois années n’aurait sans doute pas été le même.

Ensuite, je tiens à remercier mes rapporteurs de thèse, Hamamache KHEDDOUCI et Vldy RAVELOMANANA, pour leur dévouement, qui les a conduit à rédiger un rapport sur ma thèse en des jours estivaux.

Bien sûr, il serait injuste d’écarter les autres membres de mon jury de thèse que je n’ai pas encore mentionnés, et c’est pourquoi je remercie tout autant les examinateur·trices Julien COURTIEL, Enrica DUCHI, et Mehdi NAIMA, que j’ai eu la chance de rencontrer toutes les trois à diverses occasions, et à qui seront de ce fait adressés d’autres remerciements indirects ci-après.

Ensuite, j’aimerais exprimer ma gratitude envers le LIB et envers l’Université de Bourgogne, qui m’ont accueilli pendant cette thèse, et qui ont su – chacun à leur manière – coordonner mes diverses entreprises au cours de ces trois années. Sans eux, je n’aurais

pas pu présenter mes travaux, et je n'aurais pas pu m'intégrer au sein d'une équipe de recherche compétente.

À plus large échelle, je suis éternellement reconnaissant envers la communauté combinatoire, et plus particulièrement envers les habitué·es des journées ALÉA de Luminy et de la conférence biannuelle GASCom. Ces rendez-vous m'ont enchanté tant par leur excellence scientifique que par leur dimension informelle, et m'ont fait rencontrer des personnes de tous âges et tous horizons, toutes aussi passionnantes les unes que les autres. Je mets un point d'honneur à maintenir ma présence à ces événements.

Il me semble important de citer les noms de quelques un·es de mes professeur·es passé·es, qui ont contribué à allumer en moi la flamme des sciences et de la recherche. C'est pourquoi j'adresse de chaleureux remerciements à Jean-François JACQUELIN, à Walter APPEL, à Antoine HENROT, à Camille LAURENT-GENGOUX, et à Irène MARCOVICI. Quelle que soit leur discipline de prédilection, iels ont toustes une part de responsabilité – volontaire ou non – dans ma situation actuelle et dans mes desseins futurs.

Naturellement, je remercie ma famille, pour l'éducation qu'elle m'a apporté, pour sa constante attention, pour sa confiance aveugle en mes choix d'orientation, et de manière générale, pour sa présence à mes côtés, même lorsque la frontière entre nos départements respectifs nous séparait. Je peux m'estimer très chanceux d'avoir eu l'opportunité de suivre les études de mon choix, et c'est entièrement grâce à elle. J'émets une pensée particulière pour ma grand-mère paternelle Marie-Thérèse, qui – je l'espère – aurait été fière de me voir docteur. Je garde un souvenir heureux et tendre des vingt-quatre ans passés en sa compagnie.

Enfin, je n'oserais pas clore cette section sans prendre un instant pour saluer mes ami·es de tous bords. À mes camarades dijonnais·es, de Bourgogne, de France, et d'ailleurs. À mes contacts d'Internet et de Bifre. À la grande et bienveillante communauté de jeux de combat. À toutes ces braves personnes bien trop nombreuses pour que je me permette de les mentionner une par une. Je tiens à vous rendre hommage pour le temps que nous avons passé ensemble, et j'espère de ton mon cœur que l'avenir ne nous séparera pas.

Et aux scientifiques cité·es dans les précédents paragraphes, je suis heureux de vous compter désormais parmi ces gens-là.

*À la mémoire de Marie-Thérèse MARÉCHAL.*

# Table des matières

<b>Titre, résumé et mots clefs</b>	<b>3</b>
<b>Préface</b>	<b>5</b>
Remerciements . . . . .	5
<b>Table des matières</b>	<b>8</b>
<b>Conventions</b>	<b>11</b>
Abréviations . . . . .	11
Symboles . . . . .	11
<b>Glossaire</b>	<b>13</b>
<b>I Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Un bref mot sur la combinatoire</b>	<b>17</b>
1.1 Objets combinatoires . . . . .	17
1.2 Représentations d'un objet . . . . .	18
1.2.1 Représentation en mot . . . . .	18
1.2.2 Représentation en diagramme . . . . .	19
1.3 Exemples classiques de chemins sur réseau . . . . .	19
1.3.1 Chemins de Dyck . . . . .	21
1.3.2 Chemins de Motzkin . . . . .	21
1.4 Motifs combinatoires . . . . .	22
1.4.1 Facteur, préfixe et suffixe . . . . .	22
1.4.2 Motif encodé par des entiers naturels . . . . .	23
1.5 Statistiques combinatoires . . . . .	25
1.6 Rôle des bijections en combinatoire . . . . .	25
<b>2 Outils et techniques</b>	<b>27</b>
2.1 Séries génératrices . . . . .	27
2.1.1 Séries univariées . . . . .	28
2.1.2 Séries multivariées . . . . .	29
2.1.3 Séries ordinaires et séries exponentielles . . . . .	31
2.1.4 Opérations sur les séries génératrices . . . . .	31
2.2 Décompositions récursives . . . . .	33
2.3 Méthode du noyau . . . . .	34

2.4	Graphe d'état . . . . .	34
2.4.1	Rôle des graphes d'état dans l'énumération . . . . .	35
<b>II Contribution : combinatoire de chemins</b>		<b>37</b>
<b>3</b>	<b>Chemins de Dyck avec trous d'air</b>	<b>39</b>
3.1	Définitions et notations . . . . .	41
3.1.1	Chemins avec trous d'air et chemins premiers . . . . .	41
3.1.2	Chemins baissés et montés . . . . .	41
3.2	Décompositions récursives . . . . .	41
3.2.1	Décomposition du premier retour . . . . .	42
3.2.2	Décomposition de l'avant-dernier retour . . . . .	42
3.2.3	Processus de décomposition récursive . . . . .	43
3.3	Énumération . . . . .	44
3.4	Préfixes . . . . .	45
3.5	Modèle sinistroverse . . . . .	48
3.6	Lien avec d'autres chemins sur réseau . . . . .	51
3.6.1	Chemins de Motzkin sans pic . . . . .	51
3.6.2	Une bijection . . . . .	52
3.6.3	Transport de statistiques . . . . .	54
3.7	Distribution et popularité de divers motifs . . . . .	57
3.7.1	Pas vers le haut $U$ et vers le bas $D_1$ . . . . .	58
3.7.2	Catastrophes . . . . .	60
3.7.3	Pyramides . . . . .	62
3.7.4	Pics . . . . .	66
3.7.5	Retours à l'axe des abscisses . . . . .	67
3.8	Sous-ensembles de $\mathcal{T}$ . . . . .	67
3.8.1	Chemins croissants . . . . .	68
3.8.2	Chemins bornés . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Grands chemins de Dyck avec trous d'air</b>	<b>75</b>
4.1	Définitions et notations . . . . .	75
4.2	Énumération . . . . .	76
4.3	Préfixes . . . . .	78
4.4	Sous-ensembles de $\mathcal{G}$ . . . . .	79
4.4.1	Chemins minorés par une altitude négative . . . . .	79
4.4.2	Chemins bornés . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Chemins de Dyck obliques avec trous d'air</b>	<b>87</b>
5.1	Définition . . . . .	87
5.2	Énumération . . . . .	88
5.2.1	Chemins sans vallée . . . . .	91
5.2.2	Chemins sans vallée en zigzag . . . . .	93
5.3	Bijections avec d'autres objets combinatoires . . . . .	95
5.3.1	Une famille de mots binaires . . . . .	96
5.3.2	Une famille de compositions . . . . .	98

<b>Conclusion</b>	<b>101</b>
<b>Annexes</b>	<b>107</b>
Table des figures	107
Liste des tableaux	108
Bibliographie	109
<b>Index</b>	<b>113</b>

# Conventions

On donne ci-après quelques abréviations visant à alléger le document, ainsi que des notations mathématiques gagnant à être clarifiées.

## Abréviations

<b>c.-à-d.</b>	c'est-à-dire	<b>cf.</b>	confer
<b>cDota.</b>	chemin de Dyck oblique avec trous d'air, <i>singulier et pluriel identiques</i>	<b>etc.</b>	et cetera
<b>cDta.</b>	chemin de Dyck avec trous d'air, <i>singulier et pluriel identiques</i>	<b>gcDta.</b>	grand chemin de Dyck avec trous d'air, <i>singulier et pluriel identiques</i>
		<b>resp.</b>	respectivement

## Symboles

### Ensembles

$\mathcal{G}$	ensemble des gcDta.
$\mathcal{M}$	ensemble des chemins de Motzkin sans pic
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels ( $0 \in \mathbb{N}$ )
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers strictement positifs ( $0 \notin \mathbb{N}^*$ )
$\mathcal{O}$	ensemble des cDota.
$\mathcal{P}$	ensemble des cDta. premiers
$\mathcal{S}$	ensemble des cDta. sinistroverses
$\mathcal{T}$	ensemble des cDta.
$\mathcal{V}$	ensemble des cDota. sans vallée
$X_n$	ensemble des éléments de $X$ de taille $n$
$X'$	ensemble des préfixes de $X$

$X'_n$	ensemble des préfixes de $X$ de taille $n$
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathcal{Z}$	ensemble des cDota. sans vallée en zigzag
$[n]$	intervalle d'entiers $\{1, \dots, n\}$
$\emptyset$	ensemble vide

### Opérateurs

$\alpha^b$	baissé du chemin $\alpha$
$\alpha^\#$	monté du chemin $\alpha$
$\alpha \cdot \beta$	concaténation des mots $\alpha$ et $\beta$ (symbole parfois omis)
$M^T$	transposée de la matrice $M$
$X \sqcup Y$	union disjointe des ensembles $X$ et $Y$

### Statistiques

$ \alpha $	taille de l'objet combinatoire $\alpha$
------------	---

$\text{forme}(\alpha)$	forme du chemin $\alpha$ dans une décomposition donnée	$ X $	cardinal de l'ensemble $X$
$\mathbf{m}(X_n)$	nombre total d'occurrences du motif $m$ parmi tous les éléments de l'ensemble $X_n$	<b>Autres</b>	
$\hat{\mathbf{n}}$	statistique constante égale à $n$	$f _X$	restriction de l'application $f$ à l'ensemble $X$
$[P]$	crochet d'Iverson de la proposition $P$	$f(x) _{x=\alpha}$	évaluation de l'expression $f(x)$ au point $x = \alpha$
$t_\alpha$	temps de stationnement du chemin $\alpha$	$\varepsilon$	mot vide
		$(1, 2)$	composition $3 = 1 + 2$
		$\square$	fin de preuve

# Glossaire

Sont ici recensés quelques mots dont le sens premier a été repris pour définir un concept mathématique dans le document.

## B

**Bémol.** (*Solfège*) Symbole graphique (♭) appartenant à la famille des altérations. Placé à la clef ou devant une note sur une partition de musique, il indique que la hauteur naturelle de la note associée à ce bémol doit être abaissée d'un demi-ton chromatique.

## D

**Dextroverse.** Qui est écrit de la gauche vers la droite.

**Dièse.** (*Solfège*) Symbole graphique (♯) appartenant à la famille des altérations. Placé à la clef ou devant une note sur une partition de musique, il indique que la hauteur naturelle de la note associée à ce dièse doit être élevée d'un demi-ton chromatique.

## S

**Sinistroverse.** Qui est écrit de la droite vers la gauche.

## T

**Traitillé.** Représenté par une série de traits courts formant une ligne.

**Trou d'air.** (*Aéronautique*) Perte de portance due à une perturbation atmosphérique.



# Première partie

## Introduction



# Chapitre 1

## Un bref mot sur la combinatoire

Dans ce chapitre, on présente des concepts et des principes combinatoires indispensables à la compréhension du document, en ce que les études menées plus loin se reposent toujours sur une ou plusieurs notions introduites ici.

Pour autant, il est important de garder à l'esprit que le domaine de la combinatoire reste très vaste, et l'étude d'objets combinatoires peut s'aborder sous des angles divers et variés ; on gardera ici une approche énumérative et bijective, mais d'autres personnes s'intéressent par exemple aux propriétés analytiques des fonctions qui interviennent en combinatoire, et c'est pourquoi l'analyse complexe peut alors jouer un grand rôle dans leurs travaux.

En ce qui concerne la combinatoire de manière générale, on pourra se référer aux ouvrages [48, 71, 72].

### 1.1 Objets combinatoires

En pratique, les objets combinatoires sont des objets mathématiques qui forment des ensembles finis, que l'on arrive à (ou du moins, tente de) dénombrer.

Plus formellement, si un ensemble d'objets combinatoires de même nature est noté  $X$ , et que ses éléments possèdent chacun un paramètre de « taille » (la plupart du temps un nombre entier positif), alors on note  $X_n$  l'ensemble de ces objets combinatoires qui ont pour « taille »  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 1.** Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors une *permutation de taille (ou d'ordre)  $n$*  est une bijection de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  vers lui-même. On note parfois  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de taille  $n$ , et  $\mathfrak{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de taille quelconque. La taille (ou ordre) de la permutation  $\sigma$  est notée  $|\sigma|$ . Les permutations sont des objets combinatoires.

**Exemple 2.** Un *mot binaire* est une suite (généralement) finie de 0 et de 1. La *taille* d'un mot binaire est le nombre de caractères qui le composent (par exemple, le mot binaire 0110 est de taille 4). On note parfois  $\mathcal{B}$  l'ensemble des mots binaires, et  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des mots binaires de taille  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les mots binaires sont des objets combinatoires.

## 1.2 Représentations d'un objet

La section précédente laisse penser qu'en toute généralité, les objets combinatoires peuvent prendre la forme de nombreux types d'objets mathématiques. En effet, sans s'attarder sur des définitions, les combinatoricien·nes étudient communément les permutations, les mots sur un alphabet, les chemins sur réseau, les (hyper)graphes, les (hyper)cartes, les dissections de polygones, les marches aléatoires, la percolation sur réseau, les fonctions de parking, les compositions d'entiers, les partitions, etc.

Devant tant de diversité parmi les objets combinatoires, il convient de trouver un petit nombre de manières de les représenter, de sorte que les méthodes employées dans l'étude des chemins sur réseau puissent également s'appliquer aux dissections de polygones, par exemple.

### 1.2.1 Représentation en mot

Souvent, les objets combinatoires qu'on étudie sont peu commodes à écrire. En effet, leur notation de base n'est pas toujours une expression mathématique que l'on peut écrire en ligne, au milieu d'une phrase. C'est pour cela qu'on a souvent recours à un encodage par des caractères, appelés *lettres*, et l'objet combinatoire est alors noté par une suite de lettres. C'est la *représentation en mot* des objets combinatoires.

**Exemple 3.** Plutôt que de représenter un chemin sur réseau comme un ensemble d'arêtes sur un réseau donné, on peut attribuer un symbole à chacun des pas possibles, puis écrire le chemin comme la suite des symboles correspondant aux pas utilisés pour le représenter. Par exemple, le chemin ci-après comporte six types de pas (trois directions différentes, et deux sens différents pour chacune des directions).

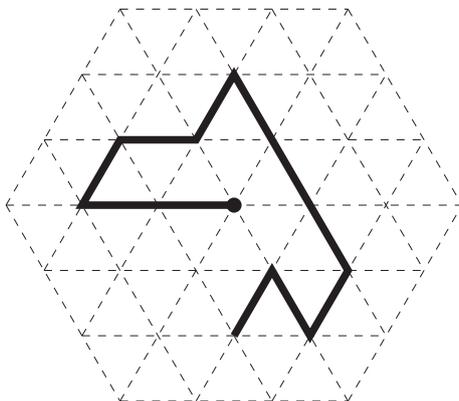


FIGURE 1.1 – Un exemple de chemin sur réseau.

On peut noter les six différents types de pas par les symboles  $A, B, C, a, b, c$ , et ainsi encoder le chemin par la suite de caractères  $aaBABCCCbcb$ .

Cette représentation en mot peut s'écrire de façon plus concise encore, en notant les répétitions successives d'une même lettre par des exposants. Plus précisément, la répétition  $\underbrace{XX \dots X}_{k \text{ fois}}$  s'écrit  $X^k$ . Ainsi, le chemin s'écrit également  $a^2BABCC^3bcb$ .

Dans certains cas, on peut aussi définir des exposants négatifs. C'est le cas ici, dans la mesure où les pas  $A$  et  $a$  sont de même direction mais de sens opposés. On note alors  $A^{-1}$  pour  $a$ , et  $A^{-k}$  pour  $a^k$ . Ainsi, le chemin s'écrit également  $A^{-2}BABC^3B^{-1}C^{-1}B^{-1}$ .

Dans la suite du document, on identifiera, par métonymie, les objets combinatoires à leurs diverses représentations. Par exemple, on dira que le chemin sur réseau ci-avant est  $A^{-2}BABC^3B^{-1}C^{-1}B^{-1}$  (quand bien même il s'agirait de sa représentation en mot). Ce léger abus de langage nous épargnera des tournures de phrases trop lourdes.

### 1.2.2 Représentation en diagramme

À l'inverse, il existe des objets combinatoires qu'on préférera représenter sous la forme d'un « dessin », plutôt qu'un mot. On parle alors de *représentation en diagramme*.

**Exemple 4.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . La représentation en diagramme (ou simplement « le diagramme ») de  $\sigma$  est la figure constituée d'une grille carrée de  $n \times n$  cellules, où on marque chaque cellule dont les coordonnées sont de la forme  $(i, \sigma(i))$ , avec  $i \in [n]$ . La figure 1.2 donne la représentation en diagramme d'une permutation d'ordre 8.

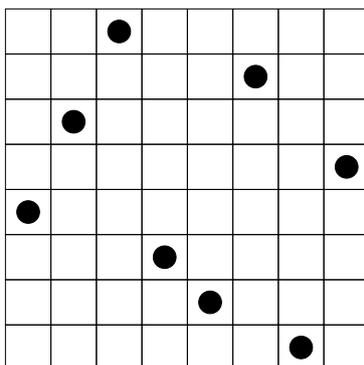


FIGURE 1.2 – Le diagramme de la permutation  $46832715 \in \mathfrak{S}_8$ .

On note que les permutations ont à la fois une représentation en mot (la suite de lettres  $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(|\sigma|)$ ) et une représentation en diagramme (cf. la figure 1.2). C'est également le cas de nombre d'autres objets combinatoires. Selon ce qui est étudié, on préférera généralement une représentation plutôt que l'autre. Par exemple, si on s'intéresse à des occurrences de facteurs (cf. la section 1.4) dans un chemin sur réseau, alors la représentation en mot sera bien adaptée; si toutefois on s'intéresse à des propriétés graphiques dans un chemin sur réseau (par exemple : « Le chemin dépasse-t-il l'altitude 5 ? », « Le diagramme du chemin présente-t-il des symétries ? », etc.), alors la représentation en diagramme sera plus pertinente.

## 1.3 Exemples classiques de chemins sur réseau

Dans cette section, on définit un type d'objet combinatoire qui sera central dans le document, à savoir : les chemins sur réseau. En toute généralité, un *chemin sur réseau* est une suite de « pas » sur un réseau donné  $\Lambda$ . Le plus souvent, le réseau sous-jacent  $\Lambda$  est

un réseau de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , et les *pas* sont des éléments du réseau (c.-à-d. simplement des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , qui ont la propriété supplémentaire d'appartenir au sous-groupe  $\Lambda$ ).

On donne les références suivantes pour la combinatoire des chemins sur réseau : [1, 2, 3, 4, 25, 44, 46, 53].

**Exemple 5.** Soit  $\Lambda$  le réseau  $\mathbb{Z}^2$  de  $\mathbb{R}^2$ . Alors la figure 1.3 illustre un exemple de chemin sur  $\Lambda$ , dont le point de départ est l'origine  $(0, 0)$ . Les pas utilisés sont (dans l'ordre d'apparition)  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-2, -4)$ ,  $(1, 1)$ , et  $(6, -2)$ . En les notant respectivement  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , et  $f$ , le chemin a pour représentation en mot  $abc^3def$ , ou encore  $aba^{-3}def$  (puisque l'on a  $a + c = c + a = (0, 0)$ ).

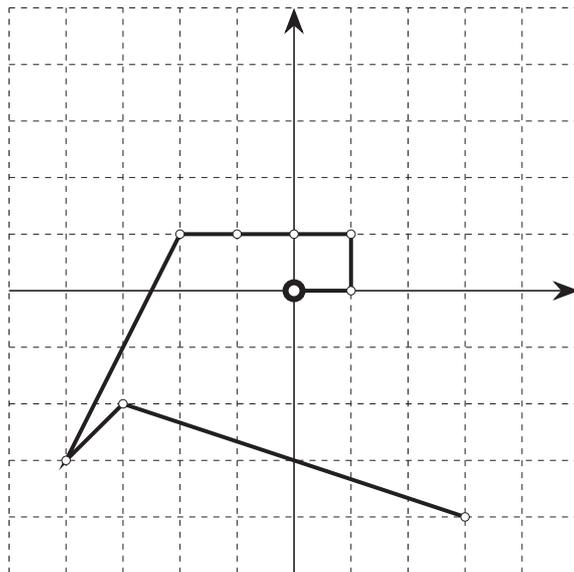


FIGURE 1.3 – Un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

Afin que les chemins sur réseau présentent un intérêt combinatoire, on étudie le plus souvent une famille de chemins sur réseau donnée, c.-à-d. l'ensemble de tous les chemins sur un réseau fixé, utilisant un ensemble de pas fixé. Généralement, on impose également des contraintes aux chemins, afin qu'ils présentent une certaine structure.

Émergent alors plusieurs grandes familles de chemins sur réseau : les chemins pouvant s'auto-intersecter, les chemins auto-évitants (c.-à-d. qui ne s'auto-intersectent pas), et les chemins dirigés (c.-à-d. que les pas des chemins ont tous par exemple une composante positive selon un certain axe). Dans [1] est donnée la terminologie anglophone suivante pour les chemins dirigés (selon le sens positif de l'axe des abscisses) sur  $\mathbb{Z}^2$  :

- les « walks » peuvent passer par et finir à n'importe quelle altitude de  $\mathbb{Z}$  ;
- les « bridges » peuvent passer par n'importe quelle altitude de  $\mathbb{Z}$ , mais doivent finir à altitude 0 ;
- les « meanders » peuvent passer par et finir à n'importe quelle altitude de  $\mathbb{N}$  ;
- enfin, les « excursions » peuvent passer par n'importe quelle altitude de  $\mathbb{N}$ , mais doivent finir à altitude 0.

Dans notre cadre d'étude, les chemins sur réseau présentés seront tous auto-évitants, et dirigés pour la plupart (hormis les chemins du chapitre 5, qui contiennent des pas qui peuvent « revenir en arrière »)

On va à présent donner deux exemples classiques de familles de chemins sur réseau.

### 1.3.1 Chemins de Dyck

En premier lieu, on définit les chemins de Dyck, étudiés par exemple dans [70, 71, 72]. Un *chemin de Dyck* est un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , dont l'ensemble de pas est  $\{(1, 1), (1, -1)\}$ , avec les contraintes suivantes :

- tout chemin de Dyck commence à l'origine  $(0, 0)$  ;
- tout chemin de Dyck finit sur l'axe des abscisses ;
- tout chemin de Dyck est contenu dans la quadrant Nord-Est  $\mathbb{N}^2$ .

On note communément le pas  $(1, 1)$  par la lettre  $U$  (comme « up », en anglais) et le pas  $(1, -1)$  par la lettre  $D$  (comme « down », en anglais), bien que d'autres encodages existent. La figure 1.4 illustre un exemple de chemin de Dyck, ainsi que son codage.

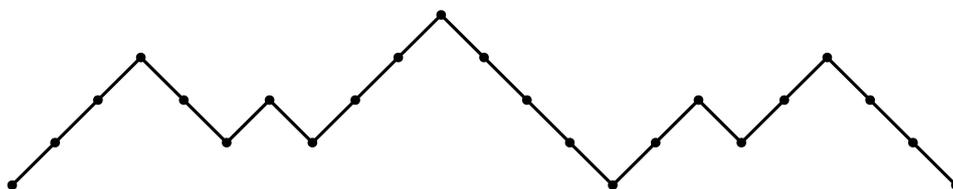


FIGURE 1.4 – Le chemin de Dyck  $U^3D^2UDU^3D^4U^2DU^2D^3$ .

Les chemins de Dyck font partie des objets combinatoires qui sont classiquement comptés par les nombres de Catalan. Plus précisément, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre de chemins de Dyck avec  $2n$  pas est

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

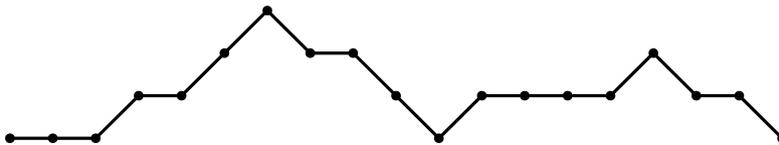
Cet entier est le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Catalan (les nombres de Catalan sont catalogués dans l'entrée [A000108](#) de [69], et comptent par exemple les façons d'insérer correctement  $n$  paires de parenthèses dans un mot de  $n+1$  lettres). On verra par la suite par quelles méthodes on peut obtenir ce genre de résultat.

### 1.3.2 Chemins de Motzkin

Une autre famille classique de chemins sur réseau est celle des chemins de Motzkin, étudiés par exemple dans [6, 21, 33, 59, 71, 72]. Un *chemin de Motzkin* est un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , dont l'ensemble de pas est  $\{(1, 1), (1, -1), (1, 0)\}$ , avec les contraintes suivantes :

- tout chemin de Motzkin commence à l'origine  $(0, 0)$  ;
- tout chemin de Motzkin finit sur l'axe des abscisses ;
- tout chemin de Motzkin est contenu dans la quadrant Nord-Est  $\mathbb{N}^2$ .

En somme, un chemin de Motzkin est un chemin de Dyck qui comporte éventuellement un troisième type de pas, horizontal. On garde communément les mêmes notations des chemins de Dyck  $U$  et  $D$  pour les pas  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ , et on note le plus souvent  $H$  ou

FIGURE 1.5 – Le chemin de Motzkin  $F^2UFU^2DFD^2UF^3UDFD$ .

$F$  (pour « horizontal » ou « flat », en anglais) le pas  $(1, 0)$ , bien que d'autres encodages existent. La figure 1.5 illustre un exemple de chemin de Motzkin, ainsi que son codage.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre de chemins de Motzkin avec  $n$  pas est

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{k+1}.$$

Cet entier est le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Motzkin, la suite de ces entiers étant cataloguée dans l'entrée [A001006](#) de [69] (elle compte par exemple les chemins de Dyck qui évitent le facteur  $UUU$ , cf. la sous-section 1.4.1 pour une définition). Encore une fois, on aura l'occasion de voir dans la suite du document comment ce genre de résultat peut être obtenu.

## 1.4 Motifs combinatoires

L'idée générale de la notion de motif est celle d'un « petit » objet combinatoire, qui peut être inclus – le sens de ce mot étant à préciser selon le type d'objet combinatoire dont il est question – (ou non) dans un autre objet combinatoire. Dans cette section, on donne la définition de différents types de motifs (facteur, classique, traitillé), puis on introduit la notion de statistique combinatoire.

### 1.4.1 Facteur, préfixe et suffixe

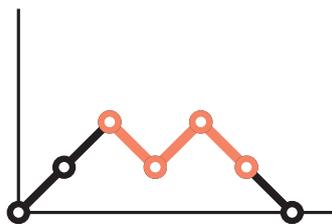
On donne ici une première notion de motif, à savoir : les facteurs. L'ouvrage [54] étudie les contenances de facteurs dans les mots en combinatoire.

Soit  $\alpha$  un objet combinatoire pouvant être représenté par un mot  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  (auquel on l'identifie dans la suite). Pour tout  $k \geq 1$  et tout mot  $m = m_1m_2\dots m_k$ , on dit que  $\alpha$  contient le *facteur*  $m$  s'il existe  $0 \leq i \leq n - k$  tels que les mots  $m$  et  $\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\dots\alpha_{i+k}$  sont égaux. Ensuite, un *préfixe* de  $\alpha$  est un facteur de la forme  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k$ , avec  $1 \leq k \leq n$ , tandis qu'un *suffixe* de  $\alpha$  est un facteur de la forme  $\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_n$ , avec  $1 \leq k \leq n$ .

Graphiquement, la contenance de facteur se voit en général plutôt facilement, étant donné que deux lettres consécutives dans la représentation en mot de  $\alpha$  correspondent souvent à deux « parties adjacentes » de la représentation de base de  $\alpha$ . Par exemple, la figure 1.6 illustre le fait que le chemin de Dyck  $UUDUDD$  contienne le facteur  $DUD$ , puisque le dessin de  $UUDUDD$  contient le dessin de  $DUD$ .

Si un objet combinatoire ne contient pas un facteur donné, on dit qu'il l'*évite*. Par exemple, le chemin de Dyck  $UUDUDD$  évite les facteurs  $UUU$  et  $DUDUDUDUDU$ .

On s'autorisera par la suite l'abus de langage suivant : au lieu de dire «  $a$  est un suffixe d'un élément  $b$  de l'ensemble  $B$ . », on dira simplement «  $a$  est un suffixe de (l'ensemble)  $B$ . ». Si on donne ici la définition des différents types de facteurs, c'est aussi parce qu'ils interviennent souvent dans la décomposition d'objets combinatoires (cf. la section 2.2).

FIGURE 1.6 – Le chemin de Dyck  $UUDUDD$  contient le facteur  $DUD$ .

Ainsi, il ne sera pas rare de lire une phrase comme « L'objet  $x \in X$  s'écrit comme la concaténation  $y \cdot z$ , où  $y$  est un élément de  $Y$ , et  $z$  est un suffixe de l'ensemble  $Z$ . », par exemple. En particulier, en plus d'étudier quelques familles de chemins sur réseau à travers le document, on s'intéressera également à l'ensemble de leurs préfixes, dont l'énumération peut s'avérer riche.

Enfin, on s'intéressera uniquement (sauf mention contraire) à des facteurs, puisque cette notion de motif est adaptée à l'étude des chemins sur réseau. Ainsi, les motifs présentés ci-après interviennent principalement dans d'autres pans de la combinatoire (notamment au sein de l'étude des permutations), et sont définis à titre culturel.

### 1.4.2 Motif encodé par des entiers naturels

Les deux types de motifs présentés ci-après sont encodés par des entiers naturels, et sont fondamentalement différents des facteurs, en ce qu'une occurrence de ces motifs ne signifie pas toujours que le motif est présent *lettre pour lettre* au sein du mot. Ici, ce sont les relations d'ordre entre les différents entiers du motif qui sont importantes, comme les définitions vont le préciser. Ces types de motifs sont étudiés par exemple dans les ouvrages [22, 47].

#### Motif classique

Soit  $n \geq 1$ , et soit  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  un mot dont les lettres sont des entiers naturels. Pour tout  $k \geq 1$  et tout mot  $m = m_1 m_2 \dots m_k$  de longueur  $k$  sur l'alphabet des entiers strictement positifs  $\mathbb{N}^*$ , vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, [i \in m \implies \forall j \in [i], j \in m],$$

on dit que  $w$  contient le *motif classique* (ou *motif non consécutif*)  $m_1 m_2 \dots m_k$  s'il existe  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  tels que  $w_{i_\alpha} < w_{i_\beta}$  si et seulement si  $m_\alpha < m_\beta$ , pour tous  $\alpha, \beta \in [k]$ . Autrement dit,  $w$  contient le motif classique  $m$  s'il existe des indices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  tels que les lettres  $w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}$  présentent les mêmes relations d'ordre que les nombres  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Par exemple, le mot 010231 contient le motif classique 213 car les indices 2, 3 et 5 (par exemple) donnent pour lettres 103, qui sont rangées de la même manière que 213.

Graphiquement, on observe la contenance de motif classique de la manière suivante : le mot  $w$  contient le motif classique  $m$  si et seulement si on peut « extraire » la représentation en diagramme du mot  $m$  depuis la représentation en diagramme du mot  $w$ , comme l'illustre la figure 1.7.

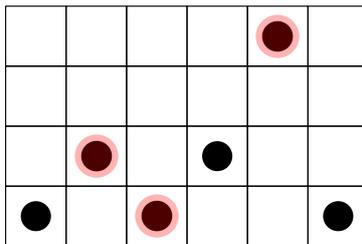


FIGURE 1.7 – Le mot 010130 contient le motif classique 213.

De même que dans la sous-section précédente, si un mot ne contient pas un motif classique donné, on dit qu’il l’*évite*. Par exemple, le mot 010130 évite les motifs classiques 321 et 123456789.

### Motif traitillé

Enfin, on introduit les motifs traitillés, qui sont des sortes de motifs classiques avec des contraintes supplémentaires d’adjacence. Plus formellement, étant donné un mot  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  dont les lettres sont des entiers naturels et un mot  $m = m_1 \square_1 m_2 \square_2 \dots \square_{k-1} m_k$ , où  $m_1 m_2 \dots m_k \in \mathfrak{S}_k$ , et où les  $\square_i$  sont soit le symbole « , », soit le symbole « - », on dit que  $w$  contient le *motif traitillé*  $m$  s’il existe  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  tels que les deux conditions suivantes sont remplies :

- pour tous  $\alpha, \beta \in [k]$ , on a  $w_{i_\alpha} < w_{i_\beta}$  si et seulement si on a  $m_\alpha < m_\beta$  (c.-à-d. que  $w$  contient le motif classique  $m_1 m_2 \dots m_k$ ) ;
- pour tout  $\gamma \in [k - 1]$  tel que  $\square_\gamma$  est le symbole « , », on a  $i_\gamma + 1 = i_{\gamma+1}$  (c.-à-d. que les indices  $i_\gamma$  et  $i_{\gamma+1}$  sont consécutifs dès lors que  $m_\gamma$  et  $m_{\gamma+1}$  sont séparées par une virgule).

Graphiquement, on observe la contenance de motif traitillé de la manière suivante : le mot  $w$  contient le motif traitillé  $m = m_1 \square_1 m_2 \square_2 \dots \square_{k-1} m_k$  si et seulement si  $w$  contient le motif classique  $m_1 m_2 \dots m_k$  (c.-à-d. que la représentation en diagramme de ce dernier peut être « extraite » de la représentation en diagramme de  $w$ ) et les contraintes d’adjacence imposées par les virgules de  $m$  sont respectées par les indices de  $w$  (les tirets n’imposant aucune contrainte sur les indices de  $w$ ). La figure 1.8 illustre un exemple de contenance de motif traitillé.

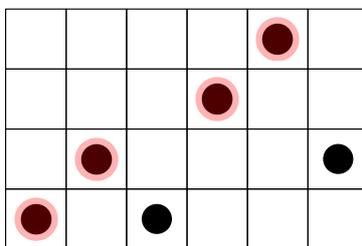


FIGURE 1.8 – Le mot 010231 contient le motif traitillé 1,2-3,4.

Encore une fois, si un mot ne contient pas un motif traitillé donné, on dit qu’il l’*évite*. Par exemple, le mot 010231 évite les motifs traitillés 1,3,2 et 1-2,3-4.

### Pour aller plus loin sur les motifs traitillés

On peut encore généraliser les motifs traitillés en imposant par exemple des contraintes sur l'adjacence verticale des points constitutifs du motif. Ces motifs sont par exemple étudiés dans [24], dans le cadre des permutations.

## 1.5 Statistiques combinatoires

De manière générale, une *statistique* combinatoire (resp. *statistique jointe*) est une fonction dont l'ensemble de départ est un ensemble d'objets combinatoires, dont l'ensemble d'arrivée est  $\mathbb{N}$  (resp.  $\mathbb{N}^k$ , avec  $k \geq 2$ ), et dont l'image réciproque de toute partie finie de  $\mathbb{N}$  (resp.  $\mathbb{N}^k$ ) est finie. Par exemple, la fonction qui associe à un chemin de Dyck sa semi-longueur est une statistique. De même, la fonction qui associe à un mot (défini sur un certain alphabet) le nombre de lettres distinctes qu'il contient est une statistique. Systématiquement, étant donné un motif  $m$ , on peut définir la statistique  $\mathbf{m}$  qui associe à un objet combinatoire son nombre d'occurrences du motif  $m$ . Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut définir une statistique constante  $\hat{\mathbf{n}}$ , définie par  $\hat{\mathbf{n}}(\alpha) = n$  pour tout objet  $\alpha$ .

Les statistiques combinatoires ont par exemple été étudiées par [29, 30, 32, 34, 36, 50, 63].

## 1.6 Rôle des bijections en combinatoire

En combinatoire, lorsque deux familles d'objets de différente nature sont énumérées par la même suite d'entiers, il est naturel d'essayer de trouver une bijection analytique (qui respecte la taille) entre les deux familles. Plus précisément, étant données deux familles d'objets combinatoires  $A$  et  $B$ , et en notant  $A_n$  (resp.  $B_n$ ) l'ensemble des éléments de  $A$  (resp.  $B$ ) de taille  $n$ , pour tout  $n \geq 0$ , de sorte qu'on ait  $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$  et  $B = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ , dès lors qu'on a  $|A_n| = |B_n|$  pour tout  $n \geq 0$ , on cherche une application  $f : A \rightarrow B$  qui soit bijective, et telle que pour tout  $n \geq 0$ , la restriction  $f|_{A_n}$  soit à son tour une bijection entre  $A_n$  et  $B_n$ . Cela permet de créer un pont entre les objets de  $A$  et ceux de  $B$ , ce qui peut permettre la compréhension de la famille  $A$  à travers la famille  $B$  (ou l'inverse).

La figure 1.9 illustre une bijection élémentaire entre les chemins de Dyck et les mots de Dyck, qui transforme les pas vers le haut  $U$  en la lettre 0, et les pas vers le bas  $D$  en la lettre 1.



FIGURE 1.9 – Une bijection naturelle entre les chemins de Dyck et les mots de Dyck.

Dans [47], Kitaev considère que certaines bijections sont « meilleures » que d'autres. Plus précisément, il s'agit des bijections qui transportent des statistiques équidistribuées. On définira cette notion dans la sous-section 3.6.3, lorsque l'on donnera une bijection entre deux familles différentes de chemins sur réseau.



# Chapitre 2

## Outils et techniques

Dans ce chapitre, on présente des outils mathématiques (séries génératrices, graphes d'état), ainsi que des techniques de raisonnement et de calcul (décomposition récursive, méthode du noyau), qui sont omniprésentes en combinatoire énumérative et bijective. En particulier, on s'en servira fréquemment dans le document. Les ouvrages [37, 76] sont des exemples de références en ce qui concerne les techniques de la combinatoire.

### 2.1 Séries génératrices

Dans cette section, on introduit un objet mathématique d'une grande utilité en combinatoire, à savoir : les séries génératrices. En première définition, une *série génératrice* (univariée) est une série formelle de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n.$$

Généralement, la suite de coefficients  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  correspond à l'énumération d'objets combinatoires, et on a typiquement  $a_n = |A_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $A_n$  est l'ensemble des éléments d'une certaine famille combinatoire qui sont de « taille »  $n$ . La variable  $x$ , quand à elle, ne correspond pas à une « grandeur physique » du problème étudié, mais sert simplement d'indéterminée ou de variable formelle.

Les séries génératrices peuvent être d'abord vues comme un moyen d'encoder l'énumération d'objets combinatoires. En effet, si la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  possède une forme close, on peut résumer toute l'information contenue dans la suite de coefficients  $(a_n)_{n \geq 0}$  dans cette formule.

Par exemple, les mots binaires sont classiquement comptés par les puissances de 2 (plus précisément, pour tout  $n \geq 0$ , il y a  $2^n$  mots binaires à  $n$  lettres). Ainsi, la série génératrice associée aux mots binaires est

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1 - 2x}.$$

Inversement, on peut se servir de la forme close lorsque la formule générale de  $a_n$  est plus compliquée. Par exemple, l'entrée [A051291](#) de [69] ne donne pas de formule explicite pour le  $n^{\text{ème}}$  terme de la suite correspondante, mais il est indiqué que la série génératrice

associée a pour forme close

$$\frac{1 + 2x^2 - x^3 - (1-x)\sqrt{1-2x-x^2-2x^3+x^4}}{2x\sqrt{1-2x-x^2-2x^3+x^4}},$$

ce qui suffit à encapsuler toute l'information relative à l'énumération des objets combinatoires associés (dans ce cas, le  $n^{\text{ème}}$  terme de la suite correspond en anglais au « Whitney number of level  $n$  of the lattice of the ideals of the fence of order  $2n + 1$  »).

Dans la suite de la section, on va présenter différents types de séries génératrices, et on verra également que certaines opérations analytiques sur les séries génératrices se laissent traduire en termes combinatoires, créant ainsi un pont entre l'analyse et la combinatoire.

### 2.1.1 Séries univariées

En premier lieu, on introduit les séries génératrices *univariées*, qui ne comportent qu'une seule indéterminée (comme dans les exemples cités au début de la section). C'est le type de série génératrice que l'on rencontre le plus souvent, notamment lorsque l'on ne s'intéresse qu'à un seul paramètre dans l'énumération d'une famille combinatoire. Plus précisément, étant donné un ensemble d'objets combinatoires  $A$ , tout élément de  $A$  possède généralement un paramètre de « taille », dont la valeur est un entier naturel, et on note le plus souvent  $A_n$  le sous-ensemble de  $A$  composé des éléments de  $A$  de taille  $n$ . Maintenant, si la question que l'on se pose est « Pour tout  $n$ , combien d'éléments de  $A$  ont pour taille  $n$ ? », alors il suffit de calculer  $|A_n|$  pour tout  $n$ . De façon équivalente, on cherche la suite  $(|A_n|)_n$ , ou encore, la série génératrice univariée  $\sum_n a_n x^n$ , avec  $a_n = |A_n|$ , qui s'écrit également de la manière suivante :

$$\sum_n a_n x^n = \sum_{\alpha \in A} x^{|\alpha|}.$$

L'étude d'une série génératrice univariée est généralement la première chose que l'on fait lors de l'énumération d'une famille combinatoire, pour plusieurs raisons :

- comme on l'a déjà évoqué, trouver la forme close de la série génératrice univariée permet de résumer de façon concise l'information relative à l'énumération des objets combinatoires auxquels on s'intéresse ;
- il est parfois difficile d'établir l'existence d'une bijection entre deux familles combinatoires, mais il est généralement plus aisé de vérifier si les deux séries génératrices univariées associées sont égales ou non ;
- certaines opérations analytiques élémentaires sur la série génératrice univariée permettent d'obtenir des résultats combinatoires immédiats (cf. la sous-section 2.1.4) ;
- il existe des méthodes simples qui permettent de calculer la forme close de la série génératrice univariée à travers une équation fonctionnelle, sans jamais avoir à calculer la suite de coefficients associée (cf. la section 2.2) ;
- enfin, il est possible de tirer des informations asymptotiques sur les coefficients du développement de Taylor de la série génératrice univariée, notamment grâce à une analyse des singularités (on pourra se référer à l'ouvrage [37]).

De plus, on n'a parfois pas besoin et/ou envie d'étudier d'autres paramètres que celui de la « taille » des objets combinatoires en question (taille qui est en général *la* statistique naturelle desdits objets), auquel cas le calcul de la série génératrice univariée constitue la base véritable du problème, de laquelle tous les résultats découleront par la suite.

Ainsi, dans la suite du document, sauf mention contraire, la variable formelle de la série génératrice univariée d'une famille de chemins sur réseau correspondra toujours à la longueur des chemins en question. Aussi, si  $A$  est un ensemble de chemins sur réseau, et qu'on a  $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ , où  $A_n$  est l'ensemble des chemins de  $A$  de longueur  $n$ , alors, par abus de langage, on parlera de « la série génératrice de  $A$  » pour désigner la série génératrice univariée de  $(|A_n|)_{n \geq 0}$ , puisqu'il n'y aura presque jamais d'ambiguïté.

## 2.1.2 Séries multivariées

Lorsque l'on cherche à énumérer une suite  $(a_{n_1, n_2, \dots, n_k})_{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}}$  caractérisée par plusieurs indices  $n_1, n_2, \dots, n_k$  (avec  $k \geq 2$ ), on peut s'intéresser à la série génératrice *multivariée* associée, définie par

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}} a_{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Le plus souvent, les indices  $n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , correspondent chacun à une statistique  $\mathbf{s}_i$ , auquel cas pour tous  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , le coefficient  $a_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  est le nombre d'objets combinatoires  $\alpha$  tels que  $\mathbf{s}_1(\alpha) = n_1$ ,  $\mathbf{s}_2(\alpha) = n_2$ , etc., et  $\mathbf{s}_k(\alpha) = n_k$ .

À titre illustratif, considérons l'ensemble des permutations  $\mathfrak{S}$ . Toute permutation  $\sigma$  possède un ordre (c'est le cardinal de son ensemble de définition) et un nombre de descentes (défini comme le nombre d'occurrences du motif traitillé  $2, 1$ ); par exemple, la permutation 461523 a pour ordre 6 et comporte 2 descentes. En notant alors  $a_{n,k}$  le nombre de permutations d'ordre  $n$  et comportant  $k$  descentes (pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k \geq 0$ ), la série génératrice multivariée (en l'occurrence *bivariée*) associée  $\sum_{n,k} a_{n,k} x^n y^k$  a pour premiers termes :

$$x + (1 + y)x^2 + (1 + 4y + y^2)x^3 + (1 + 11y + 11y^2 + y^3)x^4 + \dots,$$

et le triangle de coefficients obtenu correspond à l'entrée [A008292](#) de [69] (elle liste par exemple les coefficients des polynômes eulériens, cf. [35, 40]).

Dans le cas bivarié, où la première variable  $x$  est associée à la taille d'un objet combinatoire, et où la seconde variable  $y$  est associée au nombre d'occurrences d'un motif donné  $m$  dans l'objet combinatoire, la forme close de la série génératrice  $F(x, y)$  donne accès à la *distribution* de  $m$ , ainsi qu'à la *popularité* de  $m$ . Respectivement, ces termes désignent la donnée, pour tout  $n$  et tout  $k$ , du nombre d'objets de taille  $n$  et contenant  $k$  occurrences de  $m$ , ainsi que la donnée, pour tout  $n$ , du nombre d'occurrences totales de  $m$  dans l'ensemble des objets de taille  $n$ . Ainsi, la distribution de  $m$  est la donnée des coefficients  $[x^n y^k]F(x, y)$  pour tous  $n$  et  $k$ , tandis que la popularité de  $m$  est la donnée des sommes de coefficients suivantes, pour tout  $n$  :

$$\sum_k k [x^n y^k] F(x, y).$$

Dans le premier cas, il suffit d'avoir  $F(x, y)$  pour connaître la distribution du motif  $m$ . Dans le second cas, on calcule la quantité  $\partial_y (F(x, y))|_{y=1}$  pour connaître la popularité du motif  $m$ . En effet, on a :

$$\partial_y (F(x, y)) = \partial_y \left( \sum_{n,k} a_{n,k} x^n y^k \right) = \sum_n x^n \sum_k a_{n,k} \partial_y (y^k) = \sum_n x^n \sum_k k a_{n,k} y^{k-1},$$

d'où :

$$\partial_y (F(x, y))|_{y=1} = \sum_n \left( \sum_k k a_{n,k} \right) x^n.$$

Ainsi, on a bien :

$$[x^n] \partial_y (F(x, y))|_{y=1} = \sum_k k a_{n,k} = \sum_k k [x^n y^k] F(x, y),$$

ce qui signifie que  $\partial_y (F(x, y))|_{y=1}$  correspond bien à la popularité du motif  $m$ . Lorsque l'on précisera l'ensemble  $X_n$  dans lequel on étudie la popularité de  $m$ , on notera  $\mathbf{m}(X_n)$  le nombre total d'occurrences du motif  $m$  parmi tous les éléments de l'ensemble  $X_n$ . Nous verrons plus loin (cf. la sous-section 2.1.4) comment d'autres opérations analytiques permettent d'obtenir des quantités intéressantes à partir d'une série génératrice.

De la même manière que l'égalité entre deux séries génératrices univariées permet d'affirmer l'existence d'une bijection entre les deux familles combinatoires correspondantes, l'égalité entre deux séries génératrices multivariées donne un résultat plus fort. En effet, si deux familles combinatoires possèdent la même série génératrice multivariée

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}} a_{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

où les variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  correspondent aux statistiques  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k$  pour la première famille, et aux statistiques  $\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k$  pour la seconde, alors cela signifie qu'il existe une bijection entre ces deux familles, et que la propriété suivante est vérifiée : pour tous  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , le nombre d'objets  $\alpha$  dans la première famille tels que

$$(\mathbf{s}_1(\alpha), \mathbf{s}_2(\alpha), \dots, \mathbf{s}_k(\alpha)) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$$

est égal au nombre d'objets  $\beta$  dans la seconde famille tels que

$$(\mathbf{s}'_1(\beta), \mathbf{s}'_2(\beta), \dots, \mathbf{s}'_k(\beta)) = (n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Autrement dit, il est possible de trouver une bijection  $f$  qui respecte les  $k$ -uplets de statistiques  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k)$  (pour la première famille) et  $(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k)$  (pour la seconde famille) associés aux variables formelles  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Dans cette situation, on dit que les statistiques jointes  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k)$  et  $(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k)$  sont *équidistribuées*, et même que la bijection  $f$  *transporte* la statistique jointe  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k)$  vers  $(\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k)$ . On aura l'occasion de donner des transports de statistiques concrets dans la sous-section 3.6.3.

### 2.1.3 Séries ordinaires et séries exponentielles

Dans cette sous-section, on mentionne brièvement deux types de séries génératrices univariées. On se donne pour cela une suite d'entiers naturels  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

La série formelle  $\sum_n a_n x^n$ , précédemment appelée « série génératrice de  $(a_n)_{n \geq 0}$  », est en réalité la *série génératrice ordinaire* de  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Cependant, on peut construire d'autres séries formelles à partir de la même suite.

Par exemple, on appelle *série génératrice exponentielle* de  $(a_n)_{n \geq 0}$  la série formelle

$$\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n.$$

En pratique, on a recours à une série génératrice exponentielle dès lors que les objets étudiés présentent une notion de réétiquetage ; si par exemple la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  correspond à des objets dont les  $n$  « nœuds » peuvent être étiquetés de 1 à  $n$ , alors en permutant les étiquettes d'un objet fixé, on se retrouve avec  $n!$  versions du même objet. Ainsi la série génératrice ordinaire  $\sum_n a_n x^n$  comptera les différents étiquetages d'un même objet comme plusieurs objets distincts dans l'énumération, tandis que la série génératrice exponentielle  $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$  fait fi des étiquetages dans l'énumération, en renormalisant chaque coefficient  $a_n$  par le nombre de façons  $n!$  qu'il y a d'étiqueter  $n$  « nœuds ». C'est pourquoi les séries génératrices exponentielles interviennent parfois dans les problèmes d'énumération liés aux graphes ou aux permutations, par exemple (les ouvrages [37, 76] font notamment usage de séries génératrices exponentielles).

Il existe plusieurs autres types de séries génératrices que l'on peut construire à partir de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ , mais elles sont moins usuelles, et c'est pourquoi on se permet de ne pas donner leurs définitions, les séries génératrices ordinaires et exponentielles étant les deux principaux types de séries génératrices que l'on rencontre en combinatoire.

On avertit le-a lecteur-ice que toutes les séries génératrices dans la suite du document seront des séries génératrices ordinaires, et que, par abus de langage, on les appellera simplement « séries génératrices ».

### 2.1.4 Opérations sur les séries génératrices

On peut effectuer plusieurs opérations sur une série génératrice donnée, afin d'obtenir une nouvelle série génératrice, dont les coefficients vérifient certaines propriétés voulues. Dans la sous-section, on fixe deux séries génératrices quelconques  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et  $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ , correspondant respectivement aux familles d'objets combinatoires disjointes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . On pourra se référer à [37] en ce qui concerne les opérations sur les séries génératrices.

Par exemple, si l'on souhaite connaître la série génératrice de l'ensemble  $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ , alors on étudiera la série génératrice  $F(x) + G(x)$ , dont le coefficient en  $x^n$  est :

$$[x^n](F(x) + G(x)) = [x^n] \left( \sum_{i \geq 0} a_i x^i + \sum_{j \geq 0} b_j x^j \right) = a_n + b_n.$$

Ensuite, si l'on souhaite connaître la série génératrice de l'ensemble  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ , alors on étudiera la série génératrice  $F(x) \times G(x)$ , dont le coefficient en  $x^n$  est :

$$[x^n](F(x) \times G(x)) = [x^n] \left( \left( \sum_{i \geq 0} a_i x^i \right) \times \left( \sum_{j \geq 0} b_j x^j \right) \right) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Si l'on souhaite connaître la série génératrice dont les coefficients correspondent aux sommes partielles  $\sum_{k=0}^n a_k$ , alors on étudiera la série génératrice

$$\frac{F(x)}{1-x}.$$

En effet, pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$[x^n] \frac{F(x)}{1-x} = [x^n] \sum_{m \geq 0} a_m x^m \sum_{k \geq 0} x^k = \sum_{\{(m,k); m+k=n\}} a_m.$$

Or, l'ensemble d'indices sur lequel porte la dernière somme est  $\{(m, n-m); 0 \leq m \leq n\}$ , et donc le coefficient en  $x^n$  de  $\frac{F(x)}{1-x}$  est bien  $\sum_{m=0}^n a_m$ .

Ensuite, pour tout décalage  $d \in \mathbb{N}^*$ , la série génératrice dont le  $n^{\text{ème}}$  coefficient est  $a_{n-d}$  (resp.  $a_{n+d}$ ) est

$$x^d F(x) \quad (\text{resp. } x^{-d} \left( F(x) - \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k \right)).$$

En effet, pour tout  $n \geq d$ , on a :

$$[x^n] x^d F(x) = [x^n] \sum_{k \geq 0} a_k x^{k+d} = [x^n] \sum_{\ell \geq d} a_{\ell-d} x^\ell = a_{n-d},$$

et pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} [x^n] x^{-d} \left( F(x) - \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k \right) &= [x^n] x^{-d} F(x) - \sum_{k=0}^{d-1} [x^n] x^{-d} a_k x^k \\ &= [x^n] \sum_{\ell \geq 0} a_\ell x^{\ell-d} - \sum_{k=0}^{d-1} a_k \cdot [n = k-d], \end{aligned}$$

où  $[\cdot]$  désigne le crochet d'Iverson (c.à-d.  $[P]$  vaut 0 si la proposition  $P$  est fautive, et 1 si elle est vraie). Or, pour tout  $0 \leq k \leq d-1$ ,  $k-d$  est strictement négatif, tandis que  $n$  est positif, d'où  $[n = k-d] = 0$ , et finalement, on a bien :

$$[x^n] x^{-d} \left( F(x) - \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k \right) = [x^n] \sum_{\ell \geq 0} a_\ell x^{\ell-d} = [x^n] \sum_{i \leq -d} a_{i+d} x^i = a_{n+d}.$$

Enfin, le dernier exemple concerne les séries génératrices bivariées qui encodent les occurrences d'un motif donné  $m$  au sein d'une famille d'objets combinatoire quelconque. Ainsi, on note

$$H(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} c_{n,k} x^n y^k,$$

où  $c_{n,k}$  est le nombre d'objets combinatoires de « taille »  $n$  comportant  $k$  occurrences du motif  $m$ . On a déjà vu dans la sous-section 2.1.2 que la série  $\partial_y (H(x, y))|_{y=1}$  donnait la popularité de  $m$ . On ajoute simplement ici que la série génératrice correspondant aux objets qui évitent  $m$  est

$$H(x, 0).$$

En effet, pour tout  $n \geq 0$ , le coefficient en  $x^n$  de  $H(x, 0)$  est :

$$[x^n] H(x, 0) = [x^n] \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{m,k} x^m 0^k = [x^n] \sum_{m \geq 0} c_{m,0} x^m 0^0 = c_{n,0},$$

qui est bien égal au nombre d'objets de taille  $n$  comportant 0 occurrence du motif  $m$ .

## 2.2 Décompositions récursives

Énumérer une famille d'objets combinatoire paraît difficile au premier abord, puisqu'il faut établir le calcul d'une infinité de cardinaux. Fort heureusement, les objets étudiés présentent presque toujours une certaine structure, dont on peut tirer des équations fonctionnelles sur la série génératrice de la famille, ou bien une récurrence linéaire sur les termes de la suite énumérative.

Afin d'illustrer cette idée centrale en combinatoire, on va traiter un exemple classique.

**Exemple 6.** On appelle *mot de Dyck* tout mot binaire (ici sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ ) comportant autant de 0 que de 1, et tel que, au fur et à mesure qu'on lit le mot de gauche à droite, le nombre de 0 est toujours supérieur ou égal au nombre de 1 (cf. [29]). Par exemple, 001011 est un mot de Dyck, mais 011010 n'en est pas un. On note dans la suite  $\mathcal{D}$  l'ensemble des mots de Dyck, et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{D}_{2n}$  l'ensemble des mots de Dyck de longueur  $2n$  (c.-à-d. de semi-longueur  $n$ ).

Alors on remarque que tout mot de Dyck  $m \in \mathcal{D}$  est :

- soit le mot vide  $\varepsilon$  ;
- soit de la forme  $0 \cdot \alpha \cdot 1 \cdot \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des mots de Dyck (éventuellement vides).

On vient ainsi d'établir la décomposition récursive des mots de Dyck. À présent, en notant  $D$  la série génératrice des mots de Dyck, définie par  $D(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{D}_n| \cdot x^n$ , on en déduit l'équation fonctionnelle suivante :

$$D(x) = 1 + x^2 \cdot D(x)^2.$$

En effet, le terme  $1 = 1 \cdot x^0$  correspond au comptage du mot vide  $\varepsilon$ , unique objet de  $\mathcal{D}$  de longueur 0, tandis que le terme  $x^2 \cdot D(x)^2$  correspond au second point de la décomposition récursive : au sein des mots de Dyck de la forme  $0\alpha 1\beta$ , le comptage de  $\alpha$  correspond à un facteur multiplicatif  $D(x)$  (étant donné que  $\alpha$  est un élément de  $\mathcal{D}$ , en toute généralité), celui de  $\beta$  engendre un autre facteur multiplicatif  $D(x)$  (pour les mêmes raisons), et les nouvelles lettres 0 et 1, au nombre de deux, contribuent à augmenter la longueur du mot  $m$  de deux, d'où le facteur multiplicatif  $x^2$ .

Ainsi, après résolution, on trouve

$$D(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Or, seule l'expression avec un signe  $-$  donne lieu à un développement de Taylor, l'autre (avec un signe  $+$ ) comportant un terme  $1/x^2$  dans son développement de Laurent, ainsi que des coefficients négatifs pour les puissances positives.

Finalement, à travers la décomposition récursive des mots de Dyck, on a établi que leur série génératrice est donnée par

$$D(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2} = 1 + x^2 + 2x^4 + 5x^6 + 14x^8 + 42x^{10} + O(x^{12}).$$

Les coefficients du développement de Taylor correspondent à l'entrée [A000108](#) de [69], tout comme les chemins de Dyck de la sous-section 1.3.1.

## 2.3 Méthode du noyau

En travaillant sur des séries génératrices, on tombe souvent sur des équations fonctionnelles à résoudre (qui découlent par exemple d'une décomposition récursive d'une famille d'objets combinatoires). Parfois, l'équation fonctionnelle trouvée comporte des termes initiaux qui compliquent la résolution. Plus généralement, résoudre des équations fonctionnelles en combinatoire peut s'avérer très difficile dans certains cas, et la méthode dite « du noyau » permet d'englober une certaine famille d'équations fonctionnelles (cf. par exemple [3, 62]).

On va à présent détailler un cas simple de cette méthode. Supposons qu'on ait une équation fonctionnelle de la forme suivante :

$$K(u, x)F(u, x) = a(u, x)F(\omega, x) + b(u, x), \quad (2.1)$$

où  $K$  est un polynôme à deux variables et à coefficients entiers (appelé « noyau »),  $F$  est la série génératrice cherchée,  $a$  et  $b$  sont des fonctions, et  $\omega$  est un réel (le plus souvent 0 ou 1). On factorise alors le noyau selon ses racines en  $u$  :

$$K(u, x) = \lambda \prod_{k=1}^d (u - r_k(x))^{\alpha_k},$$

puis, on identifie toutes les racines  $r_i$  qui possèdent un développement de Taylor en  $x = 0$ . Lorsque nous emploierons la méthode du noyau dans les chapitres 3 et 4, il existera une unique telle racine  $r_i$ . Puisque  $F(u, x)$  possède un développement de Taylor en  $(0, 0)$ , il en est de même pour  $F(r_i(x), x)$ . Cela signifie que l'on peut évaluer l'équation (2.1) en  $u = r_i(x)$ , et ainsi obtenir :

$$\underbrace{0 \times F(r_i(x), x)}_{=0} = a(r_i(x), x)F(\omega, x) + b(r_i(x), x).$$

Finalement, pour peu que  $a(r_i(x), x)$  soit non nul (ce qui est toujours le cas en pratique), on en déduit finalement :

$$F(\omega, x) = -\frac{b(r_i(x), x)}{a(r_i(x), x)}.$$

**Remarque 1.** Parfois, on rajoutera artificiellement un terme non nul dans  $b(u, x)$  afin de s'assurer que  $b(r_i(x), x)$  ne soit pas nul dans la formule précédente. Le cas échéant, on précisera quelque chose comme « cette modification permet l'application de la méthode du noyau dans les calculs qui vont suivre ».

**Remarque 2.** Dans la section 5.2, on fera usage d'une généralisation de la méthode du noyau, où les équations fonctionnelles font intervenir deux conditions initiales  $F(\omega_1, x)$  et  $F(\omega_2, x)$ . Dans ce cas, le noyau  $K$  possède deux racines développables, qui nous permettent de déterminer les valeurs de  $F(\omega_1, x)$  et  $F(\omega_2, x)$ . On se référera à [3, 62] pour des explications plus générales de la méthode du noyau.

## 2.4 Graphe d'état

Dans cette section, on introduit une façon de représenter les mots qu'il est possible d'écrire dans une famille combinatoire donnée. Plus précisément, étant donné une famille de

mots combinatoires, son *graphe d'état* est un automate dont les transitions correspondent à l'écriture d'une lettre de l'alphabet, et tel que tout mot de la famille s'écrit comme une suite finie de transitions depuis l'état initial, qui termine à un état final.

**Exemple 7.** Prenons une fois de plus l'exemple des mots de Dyck (cf. l'exemple 6). La figure 2.1 donne le graphe d'état des mots de Dyck.

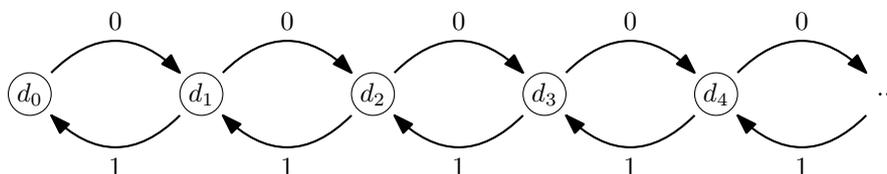


FIGURE 2.1 – Graphe d'état des mots de Dyck.

Ainsi, tout mot de Dyck s'écrit comme une suite de 0 et de 1 qui peut être obtenue en suivant les flèches du graphe d'état, en partant de l'état initial  $d_0$ , et en terminant à l'unique état final  $d_0$ .

Dans la suite du document, on prendra soin de donner une signification précise à chaque état du graphe d'état, de sorte qu'il ne sera pas nécessaire de préciser l'état initial et le(s) état(s) final(aux). De plus, au lieu d'écrire les lettres correspondantes à côté de chaque flèche, on privilégiera différents types de flèches pour distinguer graphiquement les différentes lettres.

### 2.4.1 Rôle des graphes d'état dans l'énumération

Dans notre cadre, les graphes d'état serviront à caractériser la structure des chemins que l'on étudiera (puisque les chemins sur réseau possèdent une représentation en mot). Par ricochet, ils nous permettront de déduire des équations fonctionnelles concernant les séries génératrices qui interviendront dans l'étude des chemins en question.

**Exemple 8.** Toujours en prenant le cas des mots de Dyck, on va montrer comment le graphe d'état (cf. la figure 2.1) permet de trouver la série génératrice  $D$  déjà calculée dans l'exemple 6. Pour cela, on introduit, pour tout  $k \geq 0$ , la série génératrice  $D_k$  des mots binaires reconnus par le même graphe d'état, mais où l'état final est cette fois  $d_k$ . Ainsi définie,  $D_k$  est en fait la série génératrice des préfixes de mots de Dyck comportant  $k$  0 de plus que de 1 ( $D_0$  est alors identique à  $D$ ).

À présent, en « lisant » les transitions du graphe d'état, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} D_0(x) = 1 + xD_1(x), \\ \forall k \geq 1, D_k(x) = x(D_{k-1}(x) + D_{k+1}(x)). \end{cases}$$

On introduit alors la série formelle  $F$  définie par  $F(x, u) = \sum_{k \geq 0} D_k(x)u^k$ , dans le but de trouver une forme close de  $F(x, 0) = D_0(x)$  (cette quantité étant censée être égale à  $D(x)$ ). En remplaçant les  $D_k(x)$  des sommandes de  $F(x, u)$  par les membres de droite dans le système ci-avant, on obtient :

$$F(x, u) = 1 + xD_1(x) + \sum_{k \geq 1} x(D_{k-1}(x) + D_{k+1}(x))u^k,$$

ce qui, après quelques réarrangements et simplifications, donne l'équation suivante :

$$F(x, u) = 1 + xuF(x, u) + \frac{x}{u}F(x, u) - \frac{x}{u}F(x, 0),$$

que l'on peut finalement réécrire comme suit :

$$(xu^2 - u + x) \cdot F(x, u) = xF(x, 0) - u. \quad (2.2)$$

Appliquons alors la méthode du noyau. Le noyau  $xu^2 - u + x$  possède deux racines en  $u$ , qui ont pour expressions :

$$r_+(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \quad \text{et} \quad r_-(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}.$$

Ici, seule  $r_-$  possède un développement de Taylor en  $x = 0$ , d'où :

$$F(x, 0) = \left( \frac{u}{x} \right) \Big|_{u=r_-(x)} = \frac{r_-(x)}{x},$$

c.-à-d. :

$$D_0(x) = F(x, 0) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2},$$

ce qui coïncide bien avec l'expression de  $D(x)$  trouvée précédemment dans l'exemple 6, et on peut la réinjecter dans l'équation (2.2) pour obtenir :

$$F(x, u) = \frac{x F(x, 0) - u}{x(u - r_+(x))(u - r_-(x))} = \frac{x \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2} - u}{x(u - r_+(x))(u - r_-(x))}.$$

Or, puisque  $u - r_-(x)$  est un facteur du noyau, l'équation (2.2) montre que c'est également un facteur du second membre  $xF(x, 0) - u$ , ce qui correspond au numérateur de l'équation ci-avant. Ainsi, on peut simplifier l'expression de  $F(x, u)$  par ce facteur  $u - r_-(x)$  à la fois au numérateur et au dénominateur, ce qui donne finalement :

$$F(x, u) = \frac{1}{x(r_+(x) - u)}.$$

Pour conclure, les graphes d'état permettent d'établir des systèmes d'équations linéaires portant sur des séries génératrices auxiliaires, dont la résolution aboutit à une forme close de la série génératrice initialement cherchée.

## Deuxième partie

### Contribution : Combinatoire de chemins



# Chapitre 3

## Chemins de Dyck avec trous d'air

Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle famille de chemins sur réseau, à savoir : les chemins de Dyck avec trous d'air. Il s'agit d'une généralisation de la notion de catastrophe (pour les chemins de Dyck), qui permet d'enrichir l'interprétation en termes de files d'attente qu'on se fait des chemins sur réseau (la théorie des chemins sur réseau avec catastrophes et son lien avec la théorie des files d'attente sont par exemple étudiés par Banderier et Wallner dans [4]). En l'occurrence, les chemins sur réseau considérés dans ce chapitre peuvent représenter des évolutions de files d'attente dans lesquelles on observe des remises à zéro *partielles*, et qui ne peuvent être consécutives.

On peut également faire un lien entre les chemins de Dyck avec trous d'air et les permutations triables par une pile, en s'inspirant des liens déjà établis entre ces permutations et les chemins de Dyck classiques (cf. [48, 51], par exemple ; les algorithmes de tri à pile qui y sont décrits ne sont pas tout à fait les mêmes que la version simplifiée que l'on donne ci-après). On peut – dans notre contexte – définir les permutations triables par une pile comme les permutations qui évitent le motif classique 231. On peut alors transformer une telle permutation d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  en la permutation « triée »  $12 \dots n = \text{id}_{[n]}$  à l'aide d'une pile, dont le fonctionnement est le suivant :

- (i) on commence le tri avec la pile vide, la permutation d'entrée à sa droite, et la permutation de sortie (pour le moment vide) à sa gauche, puis on empile le nombre la plus à gauche de la permutation d'entrée ;
- (ii) si le sommet de la pile est le nombre 1 (ou le nombre  $k + 1$ , dans le cas où la permutation de sortie est  $12 \dots k = \text{id}_{[k]}$  avec  $1 \leq k < n$ ), alors on dépile le sommet de la pile et on l'ajoute tout à droite de la permutation de sortie ; sinon, on empile le nombre le plus à gauche de la permutation d'entrée ;
- (iii) on répète l'étape précédente jusqu'à avoir terminé (c.-à-d. jusqu'à obtenir la permutation triée en sortie, avoir vidé la pile, ainsi que la permutation d'entrée).

Parallèlement, on construit un chemin de Dyck avec trous d'air de la manière suivante : chaque fois qu'on empile un nombre sur la pile, on écrit un pas vers le haut  $U$ , et chaque fois qu'on dépile  $k$  nombres d'affilée ( $k \geq 1$ ), on écrit un pas vers le bas  $D_k$  (la définition de ces pas est donnée dans la section 3.1 ci-après). La figure 3.1 illustre un exemple de construction de chemin de Dyck avec trous d'air à partir du tri d'une permutation.

Enfin, on peut également voir les chemins de Dyck avec trous d'air comme des vols d'avions qui rencontrent des turbulences isolées dans le temps, occasionnant une perte





suivante : lorsque l'on coupe un cDta. (non premier) à un endroit où il revient sur l'axe des abscisses (qui n'est pas le dernier retour, correspondant au dernier pas du chemin), on obtient un nouvel élément de  $\mathcal{T}$  de part et d'autre de la coupure.

Par exemple, le cDta.  $UUD_2UDUUUD_2UD_2$  peut être vu comme la concaténation des deux cDta.  $UUD_2$  et  $UDUUUD_2UD_2$ , mais aussi comme la concaténation de  $UUD_2UD$  et  $UUUD_2UD_2$ , qui sont également tous les deux des cDta.

Cela donne lieu (entre autres) à deux décompositions naturelles : celle du *premier retour*, et celle de l'*avant-dernier retour*. La plupart du temps, on n'aura pas de raison profonde de préférer une de ces décompositions, autre que la simple commodité des calculs obtenus avec.

### 3.2.1 Décomposition du premier retour

Tout d'abord, donc, on introduit la *décomposition du premier retour* des cDta., dont les détails sont donnés ci-après.

Tout élément  $\alpha$  de  $\mathcal{T}$  se classe parmi une (et une seule) des quatre formes suivantes :

- (i)  $\alpha = UD$  ;
- (ii)  $\alpha = UDB$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$  ;
- (iii)  $\alpha \in \mathcal{P}$  (équivalent à  $\alpha = \beta^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ ) ;
- (iv)  $\alpha = \beta\gamma$ , où  $\beta \in \mathcal{P}$  et  $\gamma \in \mathcal{T}$  (équivalent à  $\alpha = \delta^\sharp\gamma$ , avec  $\delta, \gamma \in \mathcal{T}$ ).

Ces quatre formes sont illustrées dans la figure 3.3. Elles traduisent la structure suivante chez un cDta. : le premier retour à l'axe des abscisses est soit un pas  $D_1$ , soit un pas  $D_k$  ( $k \geq 2$ ) ; dans chaque cas, soit le cDta. s'arrête là, soit il est suivi d'un autre cDta.

On pourra être amené.e à affiner cette décomposition afin de rendre certains calculs plus commodes. Chaque fois que cela sera fait, on ne manquera pas de le préciser, ainsi que de redonner la nouvelle décomposition de façon explicite.

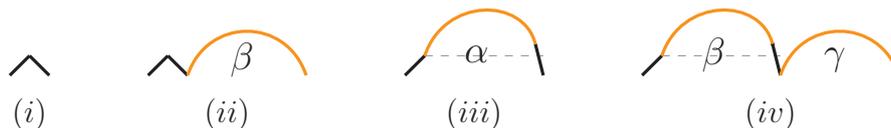


FIGURE 3.3 – Décomposition du premier retour des cDta.

En substance, on vient de d'établir le fait que  $\mathcal{T}$  s'écrit comme l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{T} = \{UD\} \sqcup (UD \cdot \mathcal{T}) \sqcup \mathcal{T}^\sharp \sqcup (\mathcal{T}^\sharp \cdot \mathcal{T}), \quad (3.1)$$

où  $(UD \cdot \mathcal{T}) = \{UD \cdot \alpha; \alpha \in \mathcal{T}\}$ ,  $\mathcal{T}^\sharp = \{\alpha^\sharp; \alpha \in \mathcal{T}\}$  et  $(\mathcal{T}^\sharp \cdot \mathcal{T}) = \{\alpha^\sharp \cdot \beta; (\alpha, \beta) \in \mathcal{T}^2\}$ .

### 3.2.2 Décomposition de l'avant-dernier retour

Ensuite, on introduit la *décomposition de l'avant-dernier retour* des cDta., dont les détails sont donnés ci-après.

Tout élément  $\alpha$  de  $\mathcal{T}$  se classe parmi une (et une seule) des quatre formes suivantes :

- (i)  $\alpha = UD$  ;

- (ii)  $\alpha = \beta UD$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ ;
- (iii)  $\alpha \in \mathcal{P}$  (équivalent à  $\alpha = \beta^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ );
- (iv)  $\alpha = \beta\gamma$ , où  $\beta \in \mathcal{T}$  et  $\gamma \in \mathcal{P}$  (équivalent à  $\alpha = \beta\delta^\sharp$ , avec  $\beta, \delta \in \mathcal{T}$ ).

Ces quatre formes sont illustrées dans la figure 3.4. Elles traduisent la structure suivante chez un cDta. : le dernier pas est soit  $D_1$ , soit  $D_k$  ( $k \geq 2$ ); dans chaque cas, soit le cDta. est premier, soit il existe un cDta. qui fait office de préfixe strict.

On pourra être amené·e à affiner cette décomposition afin de rendre certains calculs plus commodes. Chaque fois que cela sera fait, on ne manquera pas de le préciser, ainsi que de redonner la nouvelle décomposition de façon explicite.

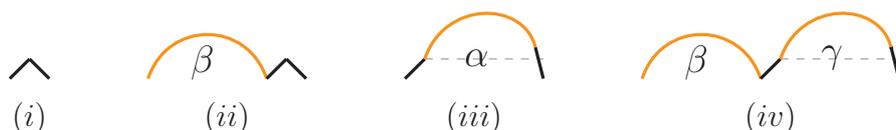


FIGURE 3.4 – Décomposition de l'avant-dernier retour des cDta.

Cette autre décomposition se traduit par une autre partition de  $\mathcal{T}$ , à savoir :

$$\mathcal{T} = \{UD\} \sqcup (\mathcal{T} \cdot UD) \sqcup \mathcal{T}^\sharp \sqcup (\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^\sharp),$$

où  $(\mathcal{T} \cdot UD) = \{\alpha \cdot UD; \alpha \in \mathcal{T}\}$  et  $(\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^\sharp) = \{\alpha \cdot \beta^\sharp; (\alpha, \beta) \in \mathcal{T}^2\}$ .

### 3.2.3 Processus de décomposition récursive

Étant donné un cDta.  $\alpha$  et une décomposition récursive, on définit le processus suivant : on identifie la forme de  $\alpha$  dans la décomposition (notée  $\text{forme}(\alpha)$ ) et on applique à  $\alpha$  une transformation qui dépend de  $\text{forme}(\alpha)$  et qui a pour but de « réduire »  $\alpha$ ; on répète alors ce procédé sur chacun des éléments produits par l'étape précédente jusqu'à ce que le processus stationne.

En ce qui concerne la décomposition du premier retour, voici ce qu'on entend par là :

- si  $\text{forme}(\alpha) = (i)$  (c.-à-d. si  $\alpha = UD$ ), alors on change  $\alpha$  en lui-même, et on note  $\alpha =: \Phi_{(i)}(\alpha)$ ;
- si  $\text{forme}(\alpha) = (ii)$  (c.-à-d. si  $\alpha = UD\beta$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ ), alors on change  $\alpha$  en  $\beta$ , et on note  $\beta =: \Phi_{(ii)}(\alpha)$ ;
- si  $\text{forme}(\alpha) = (iii)$  (c.-à-d. si  $\alpha = \beta^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ ), alors on change  $\alpha$  en  $\beta$ , et on note  $\beta =: \Phi_{(iii)}(\alpha)$ ;
- enfin, si  $\text{forme}(\alpha) = (iv)$  (c.-à-d. si  $\alpha = \beta^\sharp\gamma$ , avec  $\beta, \gamma \in \mathcal{T}$ ), alors on change  $\alpha$  en le couple  $(\beta, \gamma)$ , et on note  $(\beta, \gamma) =: \Phi_{(iv)}(\alpha)$ .

Par exemple, si  $\alpha = UDUUUD_3UUDUUD_3$ , alors ce processus donne :

$$\begin{aligned} \alpha = UDUUUD_3UUDUUD_3 &\longmapsto UUUD_3UUDUUD_3 \\ &\longmapsto (UUD_2, UUDUUD_3) \\ &\longmapsto (UD, UDUUD_2) \\ &\longmapsto (UD, UUD_2) \\ &\longmapsto (UD, UD), \end{aligned}$$

après quoi il stationne sur le 2-uplet  $(UD, UD)$ . Dans la suite, on appellera ce processus le *processus du premier retour*. La figure 3.5 illustre ce processus.

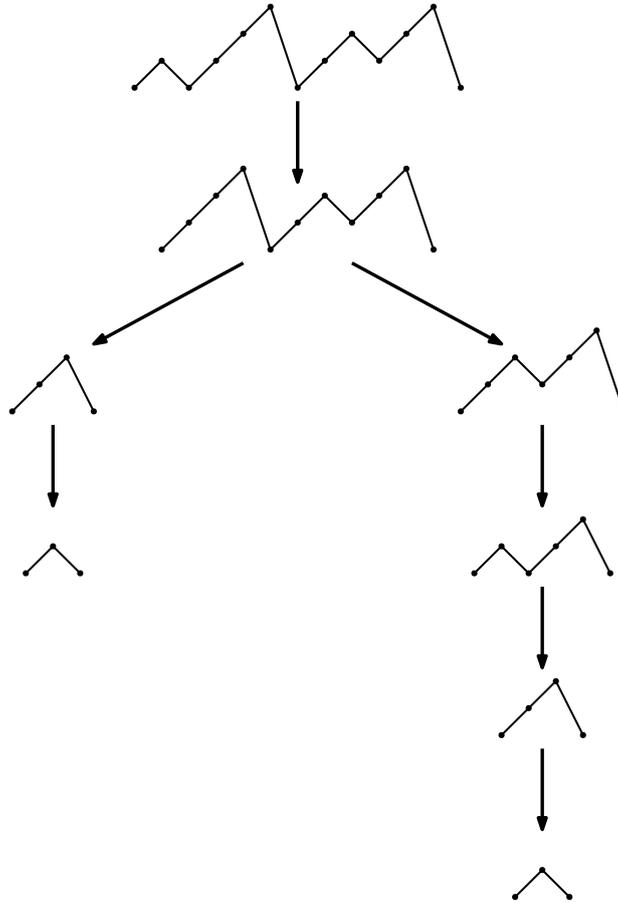


FIGURE 3.5 – Processus du premier retour appliqué au cDta.  $UDUUUD_3UUUUUD_3$ .

Le fait que la décomposition du premier retour s'appuie sur la partition (3.1) garantit le caractère bien posé du processus. Puisque les applications  $\Phi_{(ii)}$ ,  $\Phi_{(iii)}$  et  $\Phi_{(iv)}$  ont toutes les trois pour résultat de faire strictement décroître la longueur du cDta. qui est passé en argument, et puisque  $UD$  est le seul cDta. de longueur 2, le processus du premier retour finit toujours par stationner sur un  $k$ -uplet ( $k \geq 1$ ) dont tous les éléments sont le chemin  $UD$ .

En remontant ce processus, on peut d'ailleurs construire n'importe quel cDta. à partir du seul chemin de base  $UD$ .

### 3.3 Énumération

On note  $T$  la série génératrice des cDta., c.-à-d. :

$$T(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} x^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 2} |\mathcal{T}_n| \cdot x^n.$$

Afin de trouver une formule explicite pour  $T(x)$ , on utilise la décomposition de l'avant-dernier retour pour obtenir une équation fonctionnelle vérifiée par  $T$ , ce qui permettra de conclure.

Fixons momentanément un cDta.  $\alpha$ , et déterminons la contribution de chaque cas de la décomposition de l'avant-dernier retour dans la quantité  $T(x)$  :

- (i) Si  $\alpha = UD$ , alors la contribution de  $\alpha$  dans  $T(x)$  est  $x^2$  (puisque  $|\alpha| = 2$ );
- (ii) Si  $\alpha = \beta UD$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ , alors la contribution de  $\alpha$  dans  $T(x)$  est  $x^2 \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$  dans  $T(x)$  (puisque  $|\alpha| = 2 + |\beta|$ );
- (iii) Si  $\alpha = \beta^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$ , alors la contribution de  $\alpha$  dans  $T(x)$  est  $x \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$  dans  $T(x)$  (puisque  $|\alpha| = 1 + |\beta|$ );
- (iv) Enfin, si  $\alpha = \beta\gamma^\sharp$ , avec  $\beta, \gamma \in \mathcal{T}$ , alors la contribution de  $\alpha$  dans  $T(x)$  est  $x \cdot B \cdot \Gamma$ , où  $B$  (resp.  $\Gamma$ ) est la contribution de  $\beta$  (resp.  $\gamma$ ) dans  $T(x)$  (puisque  $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$ ).

Une fois qu'on a établi cela, on en déduit que  $T$  vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$T(x) = x^2 + x^2 \cdot T(x) + x \cdot T(x) + x \cdot T(x)^2.$$

Après résolution, on trouve finalement :

$$T(x) = \frac{1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{2x}, \quad (3.2)$$

et le développement de Taylor est

$$x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 17x^7 + O(x^8).$$

Par définition de  $T$ , cela signifie que  $|\mathcal{T}_2| = 1$ ,  $|\mathcal{T}_3| = 1$ ,  $|\mathcal{T}_4| = 2$ ,  $|\mathcal{T}_5| = 4$  et ainsi de suite. Les coefficients du développement de Taylor de  $T(x)$  coïncident – à un terme initial près – avec les nombres de Catalan généralisés (entrée [A004148](#) de [69]). Cette information nous permettra par la suite d'établir une bijection entre les cDta. et d'autres objets combinatoires. Plus précisément, on donnera une bijection entre les cDta. et les chemins de Motzkin sans pic dans la section 3.6.

Un équivalent asymptotique de  $[x^n]T(x)$  (obtenu grâce aux méthodes de [37, 60]) est :

$$\frac{\sqrt{14\sqrt{5} - 30}}{2n\sqrt{\pi n}(3 - \sqrt{5})} \left( \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right)^n.$$

## 3.4 Préfixes

On appelle cDta. *partiels* les préfixes de cDta. ; on note  $\mathcal{T}'_n$  l'ensemble des cDta. partiels de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{T}' = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{T}'_n$ .

Afin d'énumérer les cDta. partiels, on va établir un système d'équations linéaires vérifié par un ensemble de séries génératrices.

Pour tout  $k \geq 0$ , on note  $f_k$  (resp.  $g_k$ ) la série génératrice de la suite  $(u_{k,n})_{n \geq 2}$  (resp.  $(d_{k,n})_{n \geq 2}$ ), où, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_{k,n}$  (resp.  $d_{k,n}$ ) est le nombre de cDta. partiels de  $\mathcal{T}'_n$  finissant à altitude  $k$  par un pas  $U$  (resp.  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ). La figure 3.6 donne le graphe d'état de ces chemins.

Ainsi, les fonctions  $f_0, g_0, f_1, g_1, \dots$  vérifient le système d'équations suivant (on écrira «  $f_k$  » – resp. «  $g_k$  » – pour «  $f_k(x)$  » – resp. «  $g_k(x)$  » – afin d'alléger) :

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ \forall k \geq 1, & f_k = x(f_{k-1} + g_{k-1}) \\ \forall k \geq 0, & g_k = x \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i \end{cases}.$$

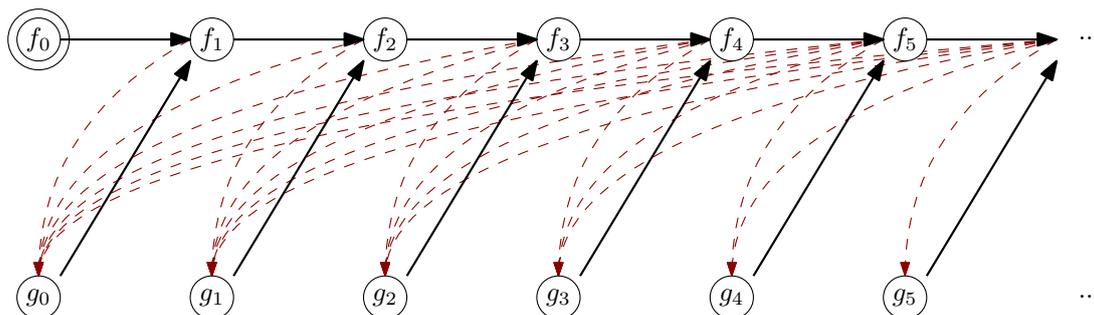


FIGURE 3.6 – Graphe d'état des cDta. partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas.

Précisons qu'on a ici délibérément écrit «  $f_0 = 1$  » (au lieu de «  $f_0 = 0$  », comme on s'y attendait plutôt). Cela s'explique par le fait que cette modification permet l'application de la méthode du noyau dans les calculs qui vont suivre. Une fois les expressions des  $f_k$  et des  $g_k$  trouvées, on prendra soin de retrancher 1 aux développements de Taylor qui font intervenir la quantité  $f_0(x)$ .

La seconde ligne dans le système traduit le fait que tout cDta. partiel finissant à altitude  $k \geq 1$  par un pas vers le haut  $U$  peut se construire à partir d'un cDta. partiel finissant à altitude  $k - 1$ , soit par un pas vers le haut  $U$  (ce qui correspond à la série génératrice  $f_{k-1}$ ), soit par un pas vers le bas  $D_\ell$  (ce qui correspond à la série génératrice  $g_{k-1}$ ). Ce faisant, la longueur dudit cDta. partiel finissant à altitude  $k - 1$  est augmentée de 1, d'où le facteur multiplicatif  $x = x^1$  devant  $f_{k-1} + g_{k-1}$ .

Enfin, la troisième ligne du système traduit le fait que tout cDta. partiel finissant à altitude  $k \geq 0$  par un pas vers le bas  $D_\ell$  peut se construire à partir d'un cDta. partiel finissant à altitude  $i \geq k + 1$  par un pas vers le haut  $U$  (puisque deux pas vers le bas ne sauraient être consécutifs), ce qui correspond aux séries génératrices  $(f_i)_{i \geq k+1}$ . Ce faisant, la longueur dudit cDta. partiel finissant à altitude  $i$  est augmentée de 1, d'où le facteur multiplicatif  $x = x^1$  devant  $\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i$ .

À présent, on pose  $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k u^k$  et  $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k u^k$ . En réinjectant les équations vérifiées par les  $f_k$  et les  $g_k$ , on trouve :

$$F(u) = 1 + xu(F(u) + G(u)), \quad \text{et} \quad G(u) = \frac{x}{1-u}(F(1) - F(u)).$$

En exprimant tout en fonction de  $F$ , on a :

$$F(u) = 1 + xuF(u) + \frac{x^2 u}{1-u}(F(1) - F(u)),$$

ou encore :

$$F(u) = \frac{1 - u + x^2 u F(1)}{xu^2 + (x^2 - x - 1)u + 1}.$$

On note  $r_+$  et  $r_-$  les deux racines en  $u$  du dénominateur, de sorte que  $F(u) = \frac{1 - u + x^2 u F(1)}{x(u - r_+)(u - r_-)}$ . Explicitement, on a :

$$r_{\pm} = \frac{1 + x - x^2 \pm \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{2x}. \quad (3.3)$$

Puisque la racine  $r_-$  possède un développement de Taylor en  $x = 0$ , la méthode du noyau assure qu'on a :

$$0 = 1 - r_- + x^2 r_- F(1),$$

d'où :

$$F(1) = \frac{r_- - 1}{x^2 r_-}.$$

En réinjectant dans l'expression de  $F(u)$ , on obtient :

$$F(u) = \frac{1 - u + u \left(1 - \frac{1}{r_-}\right)}{x(u - r_+)(u - r_-)}.$$

En utilisant les relations coefficients-racines (ou « relations de Viète ») associées à  $r_+$  et  $r_-$ , on montre que le numérateur de cette fraction s'écrit  $(u - r_-)(x^2 F(1) - 1)$ , d'où :

$$F(u) = \frac{x^2 F(1) - 1}{x(u - r_+)},$$

ce qui, après quelques calculs, se réécrit :

$$F(u) = -\frac{1}{r_+} \cdot \frac{1 - r_+}{1 - xr_-} \cdot \frac{1}{1 - u/r_+}.$$

Maintenant, on peut extraire le coefficient  $[u^k]F(u)$  pour tout  $k \geq 1$ , en s'appuyant sur le développement  $1/(1 - \alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$  :

$$\forall k \geq 1, \quad [u^k]F(u) = -\frac{1}{r_+^{k+1}} \cdot \frac{1 - r_+}{1 - xr_-},$$

et en utilisant à nouveau la relation coefficients-racines  $r_+ r_- = 1/x$ , on trouve la simplification suivante :

$$\forall k \geq 1, \quad [u^k]F(u) = x^k r_-^k.$$

Parallèlement, puisqu'on a  $F(u) = 1 + xu(F(u) + G(u))$ , on en déduit :

$$G(u) = \frac{F(u)}{xu} - \frac{1}{xu} - F(u),$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, \quad [u^k]G(u) &= [u^k] \frac{F(u)}{xu} - [u^k] \frac{1}{xu} - [u^k]F(u) \\ &= \frac{1}{x} [u^{k+1}]F(u) - 0 - x^k r_-^k = x^k r_-^k (r_- - 1). \end{aligned}$$

Finalement, en notant  $T_k$  la série génératrice des cDta. partiels finissant à altitude  $k$ , on a :

$$\forall k \geq 1, \quad T_k(x) = x^k r_-^{k+1} = \frac{(1 + x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1})^{k+1}}{2^{k+1}x}. \quad (3.4)$$

De plus, on a  $T_0 = F(0) - 1 + G(0) = T(x)$ , et l'expression de  $T(x)$  est donnée par l'équation (3.2). Le tableau 3.1 donne quelques exemples de développements de Taylor de cDta. partiels finissant à une altitude donnée.

Les coefficients de la première ligne correspondent à l'entrée [A004148](#) de [69], ceux de la deuxième à l'entrée [A075125](#) (elle compte par exemple les chemins de Dyck qui évitent les facteurs  $UDU$  et  $DUD$ ), tandis que les autres suites d'entiers du tableau ne correspondent à aucune entrée de l'encyclopédie.

$k$	$f_k(x) - [k = 0] + g_k(x)$
0	$x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 17x^7 + 37x^8 + 82x^9 + O(x^{10})$
1	$x + 2x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 10x^6 + 21x^7 + 46x^8 + 102x^9 + O(x^{10})$
2	$x^2 + 3x^4 + 3x^5 + 9x^6 + 18x^7 + 40x^8 + 90x^9 + O(x^{10})$
3	$x^3 + 4x^5 + 4x^6 + 14x^7 + 28x^8 + 66x^9 + O(x^{10})$
4	$x^4 + 5x^6 + 5x^7 + 20x^8 + 40x^9 + O(x^{10})$

TABLEAU 3.1 – Développement de Taylor de  $f_k - [k = 0] + g_k$ , pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

### 3.5 Modèle sinistroverse

Dans cette section, on introduit une nouvelle famille de chemins sur réseau. En substance, elle correspond aux cDta. lus de la droite vers la gauche. Plus formellement, un *chemin de Dyck avec trous d'air sinistroverse* est un chemin non vide sur le quadrant Nord-Est de  $\mathbb{Z}^2$ , commençant à l'origine, finissant sur l'axe des abscisses, et composé de pas vers le haut  $U_k = (1, k)$ ,  $k \geq 1$ , et vers le bas  $D = (1, -1)$ , de telle sorte que deux pas vers le haut ne sont jamais consécutifs. Par commodité, on notera «  $U$  » pour «  $U_1$  ».

Ainsi, graphiquement, tout pas  $D_k$  d'un cDta. classique (on pourra aussi dire « dextroverse » pour faire la distinction) apparaît comme le pas  $U_k$  d'un cDta. sinistroverse quand on imagine que la lecture du chemin se fait de la droite vers la gauche. La figure 3.7 illustre cette idée.



FIGURE 3.7 – Le cDta. dextroverse  $\alpha = UUDUD_2UUUD_2UD_2UUD_2$  (gauche) et le cDta. sinistroverse  $\sigma(\alpha)$  (droite).

Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des cDta. sinistroverses de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{S}_n$ . En outre, on note  $\mathcal{S}'_n$  l'ensemble des préfixes de  $\mathcal{S}$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{S}' = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{S}'_n$ . La figure 3.7 donne alors lieu à une involution de  $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n$ , qui induit elle-même une bijection entre  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  pour tout  $n \geq 2$ . Plus précisément, on définit l'application  $\sigma$  par :

$$\sigma : \begin{array}{l} \mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n \\ \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \longmapsto \varrho(\alpha_n \cdot \dots \cdot \alpha_1) \end{array},$$

où l'application  $\varrho$  est à son tour définie par :

$$\varrho : \begin{array}{l} \mathcal{T} \cup \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}' \cup \mathcal{S}' \\ U_k \longmapsto D_k \\ D_k \longmapsto U_k \\ \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \longmapsto \varrho(\alpha_1) \cdot \dots \cdot \varrho(\alpha_n) \end{array},$$

pour tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 2$ . Alors  $\sigma$  est une involution de  $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n$  pour tout  $n \geq 2$ . En

effet, pour tout  $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \in \mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n$ , on a :

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma(\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n)) &= \sigma(\varrho(\alpha_n) \cdot \dots \cdot \varrho(\alpha_1)) \\ &= \varrho(\varrho(\alpha_1) \cdot \dots \cdot \varrho(\alpha_n)) \\ &= \varrho(\varrho(\alpha_1)) \cdot \dots \cdot \varrho(\varrho(\alpha_n)) \\ &= \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n$ , l'antécédent  $\sigma^{-1}(\alpha)$  de  $\alpha$  est  $\sigma(\alpha)$ . Montrons alors que  $\sigma|_{\mathcal{T}_n}$  est une bijection entre  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{S}_n$ . Tout d'abord, on se convainc que l'image de tout cDta. dextroverse par  $\sigma$  est un cDta. sinistroverse de même longueur. En effet, si  $\alpha \in \mathcal{T}_n$ , alors chaque lettre  $U$  présente dans  $\alpha$  sera changée en la lettre  $D$ , et chaque lettre  $D_k$  sera changée en la lettre  $U_k$ , ce qui montre que l'alphabet du chemin  $\sigma(\alpha)$  est le bon. De plus, deux lettres  $D_i$  et  $D_j$  ne pouvant être consécutives dans  $\alpha$ , leurs images  $U_i$  et  $U_j$  ne sauraient l'être dans  $\sigma(\alpha)$ , l'application  $\sigma$  conservant le caractère consécutif des lettres qui sont consécutives dans le chemin de départ, ce qui montre que les contraintes des cDta. sinistroverses sur les pas vers le haut sont bien respectées.

Enfin, si  $\beta$  est un élément de  $\mathcal{S}_n$ , alors le chemin  $\alpha = \sigma(\beta)$  est un élément de  $\mathcal{T}_n$  (par le même raisonnement que ci-avant, on se convainc qu'on a  $\sigma(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{T}_n$ ), et c'est le seul à vérifier  $\sigma(\alpha) = \sigma(\sigma(\beta)) = \beta$ , étant donné que  $\sigma$  est bijective (de  $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{S}_n$  vers lui-même).

La bijectivité de  $\sigma$  entre  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  pour tout  $n \geq 2$  montre que les cDta. sinistroverses partagent la même énumération que les cDta. dextroverses. Notamment, la série génératrice de  $(|\mathcal{S}_n|)_{n \geq 2}$  est égale  $T$ , et son expression est par conséquent donnée par l'équation (3.2).

Toutefois, l'énumération des cDta. sinistroverses partiels n'est pas la même que celle des cDta. dextroverses partiels : par exemple, il n'y a pas de cDta. dextroverse partiel de longueur 1 finissant à altitude 2, mais il y a un cDta. sinistroverse partiel de longueur 1 finissant à altitude 2 (ce chemin étant  $U_2$ ). Afin d'énumérer les cDta. sinistroverses partiels, on va faire un travail analogue à celui qui a été fait sur les cDta. dextroverses partiels dans la section précédente. Toutefois, si l'on reprend les notations  $f_k$  et  $g_k$ , en les adaptant aux cDta. sinistroverses partiels, alors la méthode du noyau n'aboutira pas.

Ainsi, pour tout  $k \geq 0$ , on introduit les notations  $a_k$  et  $b_k$ , que l'on va voir dans un premier temps comme des états, plutôt que des séries génératrices. Plus précisément, entre deux pas consécutifs (et également avant le premier pas et après le dernier pas), tout cDta. sinistroverse partiel est dans un état de la forme  $a_k$  ou  $b_k$ , ces derniers étant définis comme suit :

- l'état  $a_k$  est un état intermédiaire (c.-à-d. qu'il existe un pas du chemin situé après cet état), à altitude  $k$ , et le prochain pas du chemin est un pas vers le haut  $U_\ell$  ;
- l'état  $b_k$  est à altitude  $k$  ; s'il est intermédiaire, alors le prochain pas du chemin est  $D$  (il n'y a bien sûr pas de condition sur le prochain pas lorsque l'état  $b_k$  est atteint après le dernier pas du chemin).

Par exemple, le cDta. sinistroverse partiel  $U_3DDU_2DU_2D$  passe par les états successifs suivants :

$$[a_0, b_3, b_2, a_1, b_2, a_1, b_3, b_2].$$

La figure 3.8 illustre les successions d'états possibles, sous la forme d'un graphe d'état.

Maintenant, puisque les états finaux sont exactement les  $b_k$ , on peut interpréter les  $a_k$  et les  $b_k$  du graphe d'état comme des séries génératrices, et on va chercher à trouver

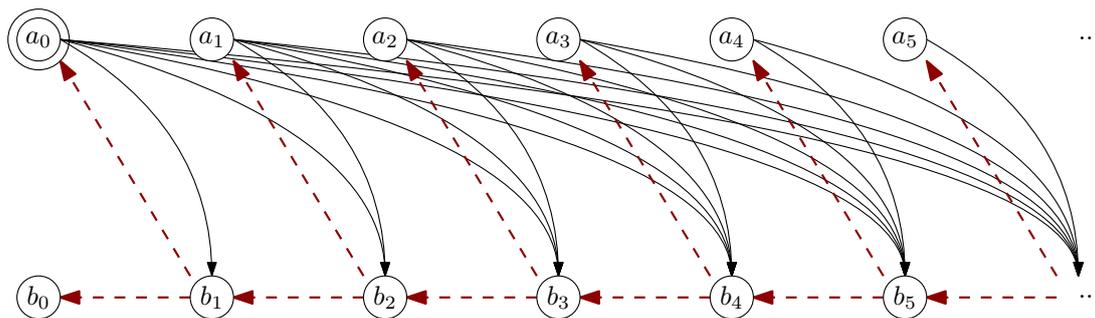


FIGURE 3.8 – Graphe d'état des cDta. sinistroverses partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. Les seuls états finaux sont ceux de la rangée du bas.

l'expression de  $b_k(x)$ , qui s'identifie alors à la série génératrice des cDta. sinistroverses partiels finissant à altitude  $k$ . Le système d'équations vérifié par les  $a_k$  et les  $b_k$  est alors le suivant :

$$\begin{cases} a_0 = 1 + xb_1 \\ \forall k \geq 1, a_k = xb_{k+1} \\ \forall k \geq 0, b_k = x \left( b_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \right) \end{cases} .$$

Une fois de plus, on a écrit «  $a_0 = 1 + xb_1$  », alors qu'on s'attendait plutôt à «  $a_0 = xb_1$  ». Cette modification permet l'application de la méthode du noyau dans les calculs qui suivent. En posant  $A(u) = \sum_{k \geq 0} a_k u^k$  et  $B(u) = \sum_{k \geq 0} b_k u^k$ , le système ci-avant donne :

$$A(u) = 1 + \frac{x}{u} (B(u) - B(0)), \quad \text{et} \quad B(u) = \frac{x}{u} (B(u) - B(0)) + \frac{xu}{1-u} A(u).$$

En exprimant tout en fonction de  $B$ , on a :

$$B(u) = \frac{x}{u} (B(u) - B(0)) + \frac{xu}{1-u} + \frac{x^2}{1-u} (B(u) - B(0)),$$

ou encore :

$$B(u) = \frac{x((1-u+xu)B(0) - u^2)}{u^2 + (x^2 - x - 1)u + x}.$$

Les deux racines (en  $u$ ) du dénominateur sont  $xr_+$  et  $xr_-$ , où les expressions de  $r_+$  et  $r_-$  sont données par la formule (3.3). Puisque la racine  $xr_-$  possède un développement de Taylor en  $x = 0$ , la méthode du noyau assure qu'on a :

$$0 = -x^3 r_-^2 + x(1 - xr_- + x^2 r_-)B(0),$$

d'où :

$$B(0) = \frac{(xr_-)^2}{1 - xr_- + x^2 r_-},$$

ce qui, en faisant usage des relations coefficients-racines associées à  $xr_+$  et  $xr_-$ , se réécrit :

$$B(0) = r_- - 1.$$

On aurait d'ailleurs pu aboutir à ce résultat en utilisant le fait que  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{T}_n$  sont équipotents pour tout  $n \geq 2$  (comme évoqué au début de la section), d'où  $B(0) = T(x) = r_- - 1$ .

En réinjectant dans l'expression de  $B(u)$ , et après quelques simplifications, on obtient :

$$B(u) = \frac{r_- - 1}{xr_-(1 - ur_-)} - x.$$

Maintenant, on peut extraire le coefficient  $[u^k]B(u)$  pour tout  $k \geq 0$ , en s'appuyant sur le développement  $1/(1 - \alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$  :

$$\forall k \geq 0, \quad [u^k]B(u) = [u^k](-x) + \frac{r_- - 1}{xr_-} [u^k] \frac{1}{1 - ur_-} = -x[k = 0] + \frac{r_- - 1}{xr_-} r_-^k.$$

Finalement, en notant  $S_k$  la série génératrice des cDta. sinistroverses partiels finissant à altitude  $k$ , on a :

$$\forall k \geq 0, \quad S_k(x) = -x[k = 0] + \frac{r_- - 1}{x} r_-^{k-1}. \quad (3.5)$$

Lorsque  $k = 0$ , on a bien  $[u^0]B(u) = -x + \frac{r_- - 1}{xr_-} = r_- - 1$ , dont le développement de Taylor coïncide avec celui de la série génératrice des cDta. dextroverses (comme on l'a mentionné lors du calcul de  $B(0)$ ), et lorsque  $k \geq 1$ , le développement de Taylor de  $[u^k]B(u)$  est différent de celui des cDta. dextroverses partiels finissant à altitude  $k$ . Tout cela confirme ce que l'on avait annoncé plus tôt dans la section. Le tableau 3.2 donne quelques exemples de développements de Taylor de cDta. sinistroverses partiels finissant à une altitude donnée.

$k$	$b_k(x)$
0	$x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 17x^7 + 37x^8 + 82x^9 + O(x^{10})$
1	$x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + 37x^7 + 82x^8 + 185x^9 + O(x^{10})$
2	$x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 + 13x^5 + 29x^6 + 65x^7 + 148x^8 + 341x^9 + O(x^{10})$
3	$x + x^2 + 4x^3 + 8x^4 + 19x^5 + 44x^6 + 102x^7 + 239x^8 + 563x^9 + O(x^{10})$
4	$x + x^2 + 5x^3 + 10x^4 + 26x^5 + 62x^6 + 149x^7 + 359x^8 + 865x^9 + O(x^{10})$

TABLEAU 3.2 – Développement de Taylor de  $b_k$ , pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Les coefficients des deux premières lignes correspondent à l'entrée [A004148](#) de [69], ceux de la troisième à l'entrée [A093128](#) (elle compte par exemple les dissections de polygones qui n'utilisent que des diagonales strictement disjointes), tandis que les autres suites d'entiers du tableau ne correspondent à aucune entrée de l'encyclopédie.

## 3.6 Lien avec d'autres chemins sur réseau

La section 3.3 montre que les cDta. partagent, à un terme initial près, la même énumération que les chemins de Motzkin sans pic (cf. l'entrée [A004148](#) de [69]). On va brièvement définir ce qu'ils sont, puis expliciter analytiquement une bijection entre ces deux familles de chemins. Enfin, on se servira de ladite bijection pour mettre en exergue quelques équidistributions de statistiques entre ces deux types d'objets.

### 3.6.1 Chemins de Motzkin sans pic

On rappelle d'abord la définition des chemins de Motzkin, déjà évoqués dans la sous-section 1.3.2. Un *chemin de Motzkin* est un chemin non vide sur le quadrant Nord-Est

de  $\mathbb{Z}^2$ , commençant à l'origine, finissant sur l'axe des abscisses, et composé de pas vers le haut  $U = (1, 1)$ , vers le bas  $D = (1, -1)$ , et vers l'avant  $F = (1, 0)$ . On appelle *pic* le facteur  $UD$ , et on dit alors qu'un chemin de Motzkin est *sans pic* lorsqu'il ne contient aucune occurrence de ce motif.

Par exemple, le chemin de Motzkin  $FFUDUDFD$  n'est pas sans pic, mais le chemin  $FFUFDUFD$  l'est. On appelle *longueur* d'un chemin de Motzkin sans pic son nombre de pas. Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{M}_n$  l'ensemble des chemins de Motzkin sans pic de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{M} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ .

De la même façon qu'on a établi la décomposition de l'avant-dernier retour pour les cDta., on présente la décomposition suivante pour les chemins de Motzkin sans pic ; si  $\alpha$  est un élément de  $\mathcal{M}$ , alors il se classe parmi une (et une seule) des quatre formes suivantes :

- (i)  $\alpha = F$  ;
- (ii)  $\alpha = U\beta D$ , où  $\beta \in \mathcal{M}$  ;
- (iii)  $\alpha = \beta F$ , où  $\beta \in \mathcal{M}$  ;
- (iv)  $\alpha = \beta U\gamma D$ , où  $\beta, \gamma \in \mathcal{M}$ .

Cette décomposition facilitera la mise en place d'une bijection entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{M}$ , comme on le verra dans la sous-section suivante.

### 3.6.2 Une bijection

Construisons une application de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{M}$  en mettant en parallèle la décomposition de l'avant-dernier retour de  $\mathcal{T}$  d'un côté, et la décomposition de  $\mathcal{M}$  vue dans la sous-section précédente de l'autre ; on définit l'application  $\psi$  de la manière suivante :

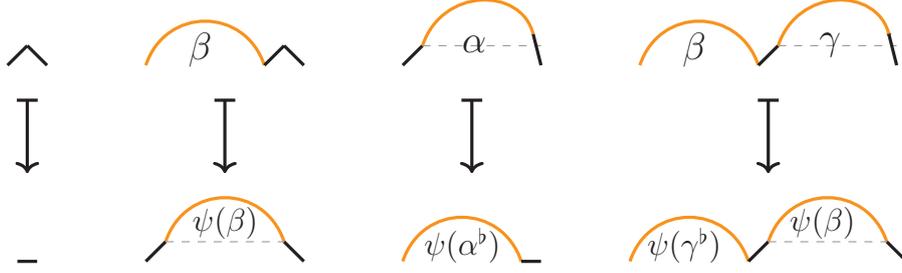
$$\psi : \alpha \in \mathcal{T} \longmapsto \psi(\alpha) = \begin{cases} F & \text{si } \alpha = UD ; \\ U\psi(\beta)D & \text{si } \alpha = \beta UD, \text{ avec } \beta \in \mathcal{T} ; \\ \psi(\alpha^b)F & \text{si } \alpha \in \mathcal{P} ; \\ \psi(\gamma^b)U\psi(\beta)D & \text{si } \alpha = \beta\gamma, \text{ avec } \beta \in \mathcal{T} \text{ et } \gamma \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

La figure 3.9 illustre la façon dont l'application  $\psi$  est structurée, tandis que la figure 3.10 montre l'action de cette application sur un exemple de cDta. Vérifions d'abord que cette dernière est bien à valeurs dans  $\mathcal{M}$ .

Par définition de  $\psi$ , on observe qu'aucune image  $\psi(\alpha)$  (avec  $\alpha \in \mathcal{T}$ ) ne commence par un pas vers le bas  $D$  ni ne finit par un pas vers le haut  $U$ . Ainsi, par exemple, si  $\alpha = \beta UD$  (avec  $\beta \in \mathcal{T}$ ), alors le chemin-image  $\psi(\alpha) = U\psi(\beta)D$  contient un pic si et seulement si le chemin  $\psi(\beta)$  contient un pic. Or, puisque le cas de base dans la définition de  $\psi$  est  $\psi(UD) = F$ , et que  $F$  ne contient pas de pic, on se convainc que  $\psi(\beta)$  ne contient pas de pic, et ce peu importe la forme de  $\beta$ . De la même façon, si  $\alpha = \beta\gamma$  (avec  $\beta \in \mathcal{T}$  et  $\gamma \in \mathcal{P}$ ), alors le même type de raisonnement permet de conclure que le chemin-image  $\psi(\alpha) = \psi(\gamma^b)U\psi(\beta)D$  ne contient pas de pic.

En définitive, on a bien l'inclusion  $\psi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{M}$ .

**Théorème 9.** L'application  $\psi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}$  définie ci-avant est bijective. De plus, pour tout  $n \geq 2$ , la restriction  $\psi|_{\mathcal{T}_n}$  est une bijection entre  $\mathcal{T}_n$  et  $\mathcal{M}_{n-1}$ .


 FIGURE 3.9 – Application  $\psi$  de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* On va montrer d'abord le second point. Soit donc  $n \geq 2$ . Pour commencer, la définition de  $\psi$  montre que la restriction  $\psi|_{\mathcal{T}_n}$  est à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n-1}$  (c.-à-d. que l'image de n'importe quel cDta. de longueur  $n$  est un chemin de Motzkin sans pic de longueur  $n - 1$ ).

Ensuite, étant donné que  $|\mathcal{M}_{n-1}|$  est égal au  $(n - 1)^{\text{ème}}$  nombre de Catalan généralisé (cf. l'entrée [A004148](#) de [69]), au même titre que  $|\mathcal{T}_n|$  (cf. la fin de la section 3.3), et puisque ces cardinaux sont finis, il suffit de montrer que  $\psi|_{\mathcal{T}_n}$  est injective pour montrer qu'elle est bijective. On va raisonner par récurrence sur  $n$ .

Soient alors  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathcal{T}_2$  vérifiant  $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ , et montrons qu'on a  $\alpha = \beta$ . Étant donné que  $\mathcal{T}_2$  est réduit au singleton  $\{UD\}$ , on a directement  $\alpha = \beta$ .

Soit maintenant  $n \geq 2$ , et supposons que pour tout  $2 \leq k \leq n$ ,  $\psi|_{\mathcal{T}_k}$  est injective. Soient ensuite  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathcal{T}_{n+1}$  vérifiant  $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ , et montrons qu'on a  $\alpha = \beta$ . Étant donné que  $\psi$  envoie la partition

$$\mathcal{T} = \{UD\} \sqcup (\mathcal{T} \cdot UD) \sqcup \mathcal{T}^\# \sqcup (\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^\#)$$

sur la partition

$$\mathcal{M} = \psi(\{UD\}) \sqcup \psi(\mathcal{T} \cdot UD) \sqcup \psi(\mathcal{T}^\#) \sqcup \psi(\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^\#)$$

(cf. la décomposition de  $\mathcal{M}$  donnée dans la sous-section précédente), les cDta.  $\alpha$  et  $\beta$  ont nécessairement la même forme dans la décomposition de l'avant-dernier retour. Si, par exemple,  $\alpha$  est de la forme  $\alpha_1 \cdot \alpha_2^\#$ , et si  $\beta$  est de la forme  $\beta_1 \cdot \beta_2^\#$ , alors, d'après la définition de  $\psi$ , on a :

$$\begin{cases} \psi(\alpha) &= \psi(\alpha_2)U\psi(\alpha_1)D; \\ \psi(\beta) &= \psi(\beta_2)U\psi(\beta_1)D. \end{cases}$$

Puisque  $\psi(\alpha_1)$  et  $\psi(\beta_1)$  sont des éléments de  $\mathcal{M}$ , les chemins  $U\psi(\alpha_1)D$  et  $U\psi(\beta_1)D$  ne sauraient revenir à l'axe des abscisses à part à leur toute fin. Or, puisqu'on a  $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ , les chemins  $U\psi(\alpha_1)D$  et  $U\psi(\beta_1)D$  sont à leur tour égaux, ainsi que  $\psi(\alpha_1)$  et  $\psi(\beta_1)$ . Cela implique ensuite l'égalité des chemins  $\psi(\alpha_2)$  et  $\psi(\beta_2)$ .

Les chemins  $\psi(\alpha_1)$  et  $\psi(\beta_1)$  étant égaux et de longueur inférieure ou égale à

$$|\psi(\alpha)| = |\psi(\beta)| = (n + 1) - 1 = n,$$

et l'application  $\psi|_{\mathcal{T}_{|\psi(\alpha)|+1}}$  étant injective par hypothèse de récurrence, on en déduit que  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont égaux. On montre ensuite que les chemins  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  sont à leur tour égaux, le même raisonnement pouvant alors être invoqué.

En somme, puisqu'on a  $\alpha_1 = \beta_1$  et  $\alpha_2 = \beta_2$ , on a  $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2^\sharp = \beta_1 \cdot \beta_2^\sharp = \beta$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont d'une autre forme dans la décomposition de l'avant-dernier retour, un raisonnement analogue permet de montrer l'égalité  $\alpha = \beta$ , ce qui achève la récurrence. *In fine*, on a bien montré que  $\psi|_{\mathcal{T}_n}$  est injective – et donc bijective – de  $\mathcal{T}_n$  vers  $\mathcal{M}_{n-1}$ , pour tout  $n \geq 2$ .

Finalement,  $\mathcal{T}$  étant égal à l'union disjointe  $\bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{T}_n$ , et  $\mathcal{M}$  étant égal à l'union disjointe  $\bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{M}_{n-1}$ , la bijectivité de  $\psi|_{\mathcal{T}_n}$  de  $\mathcal{T}_n$  vers  $\mathcal{M}_{n-1}$  pour tout  $n \geq 2$  entraîne celle de  $\psi$  de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{M}$ . En effet, pour tout  $\beta \in \mathcal{M}$ , le chemin

$$\alpha = \left( \psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|+1}} \right)^{-1} (\beta) \in \mathcal{T}_{|\beta|+1} \subset \mathcal{T}$$

est le seul à vérifier  $\psi(\alpha) = \beta$ . □



FIGURE 3.10 – Un cDta. et son image par  $\psi$ .

### 3.6.3 Transport de statistiques

Dans cette sous-section, on s'intéresse au transport de certaines statistiques par les bijections  $(\psi|_{\mathcal{T}_n})_{n \geq 2}$ . Pour commencer, on dira que deux statistiques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , respectivement définies sur les ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , sont *équidistribuées* s'il existe une bijection  $f$  entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  vérifiant  $\mathbf{a}(x) = \mathbf{b}(f(x))$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . Cela signifie qu'en plus d'avoir autant d'éléments de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$  pour lesquels les statistiques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont égales à  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la bijection  $f$  « respecte » cette structure. Lorsque c'est le cas, on notera abusivement  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ , et on dira que  $f$  *transporte* la statistique  $\mathbf{a}$  vers la statistique  $\mathbf{b}$ .

Il est à noter qu'une définition équivalente est de dire que les deux statistiques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont équidistribuées si et seulement si on a  $|\mathbf{a}^{-1}(\{n\})| = |\mathbf{b}^{-1}(\{n\})|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (on suppose ici que ces cardinaux sont finis). En effet, si cette dernière propriété est vérifiée, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une bijection  $f_n$  entre  $\mathbf{a}^{-1}(\{n\})$  et  $\mathbf{b}^{-1}(\{n\})$ . On peut alors construire la bijection  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  définie par :

$$\forall x \in \mathcal{A}, f(x) = f_{\mathbf{a}(x)}(x).$$

Ainsi, l'existence d'une bijection qui relie deux statistiques équidistribuées est en réalité garantie. Cependant, il n'est pas garanti qu'on dispose toujours d'une formule explicite agréable pour ladite bijection. C'est pour cette raison qu'on donne ici des transports de statistiques par les bijections  $(\psi|_{\mathcal{T}_n})_{n \geq 2}$ , pour lesquelles on dispose de la définition récursive explicite de  $\psi$ , qui s'écrit de façon concise.

**Théorème 10.** Pour tous  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ , on a les transports de statistiques suivants :

- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} + \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{D}$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{D}) = \psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UD}) = \mathbb{1}_{\mathbf{F}} + \mathbf{UFD} + \mathbb{1}_{\mathbf{UMD}} + \mathbf{U}^2\mathbf{MD}^2$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{DU}) = \mathbf{UFD} + \mathbf{U}^2\mathbf{MD}^2$  ;

- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{UU}) = \mathbf{F} - \hat{\mathbf{1}}$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\Delta_{\mathbf{k}}) = \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}}\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Pic}) = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{1}}$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Ret}) = \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{DerF}$  ;
- $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{ADer}) = \mathbf{Ret}$ ,

où :

- on rappelle que, comme évoqué dans la section 1.5, la statistique  $\mathbf{U}$  correspond au nombre d'occurrences du motif  $U$  – et plus généralement, pour tout motif  $m$ , la statistique  $\mathbf{m}$  correspond au nombre d'occurrences du motif  $m$  – ;
- $\mathbb{1}_{\beta}(\alpha) = [\alpha = \beta]$ , où  $[\cdot]$  désigne le crochet d'Iverson ;
- $\mathbb{1}_{\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}}(\alpha) = [\exists\beta \in \mathcal{M}, \alpha = U\beta D]$  ;
- $\mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2(\alpha)$  est le nombre de motifs de la forme  $U^2\beta D^2$  ( $\beta \in \mathcal{M}$ ) dans  $\alpha$  ;
- $\Delta_k$  est le motif  $U^k D_k$  ;
- $\mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}}(\alpha) = [\exists\beta \in \mathcal{M}, \alpha = F^{\mathbf{k}-1}U\beta D]$  ;
- $\mathbf{UF}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2(\alpha)$  est le nombre de motifs de la forme  $UF^{\mathbf{k}-1}U\beta D^2$  ( $\beta \in \mathcal{M}$ ) dans  $\alpha$  ;
- $\mathbf{Pic}$  est le motif  $\sum_{\ell \geq 1} U D_{\ell}$  ;
- $\mathbf{Ret}(\alpha)$  est le nombre de retours à l'axe des abscisses dans  $\alpha$  ;
- $\mathbf{DerF}(\alpha)$  est la position du dernier pas vers l'avant  $F$  de  $\alpha$  ;
- $\mathbf{ADer}(\alpha)$  est l'amplitude du dernier pas de  $\alpha$  (c.-à-d.  $\mathbf{ADer}(xD_{\ell}) = \ell$ ).

*Démonstration.* Par souci de concision, on détaille uniquement la preuve pour  $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{U})$  et  $\psi|_{\mathcal{T}_n}(\Delta_{\mathbf{k}})$ , les autres points pouvant être démontrés par des raisonnements analogues. On raisonne par récurrence sur  $n$ .

Tout d'abord, les ensembles  $\mathcal{T}_2 = \{UD\}$  et  $\mathcal{M}_1 = \{F\} = \{\psi|_{\mathcal{T}_2}(UD)\}$  sont tous deux réduits à un élément, et on vérifie aisément qu'on a

$$(\mathbf{F} + \mathbf{U})(F) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(F) = 1 = \mathbf{U}(UD)$$

et

$$(\mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}}\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2)(F) = [k = 1] = \Delta_{\mathbf{k}}(UD).$$

Soit maintenant  $n \geq 2$ , et supposons que pour tout  $2 \leq \ell \leq n$  et pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}_{\ell}$ , on a

$$\mathbf{U}(\alpha) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{\ell}}(\alpha)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{\ell}}(\alpha))$$

et

$$\Delta_{\mathbf{k}}(\alpha) = (\mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}}\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{\mathbf{k}-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2)(\psi|_{\mathcal{T}_{\ell}}(\alpha)).$$

Soit  $\alpha \in \mathcal{T}_{n+1}$ . Comme  $n + 1 \geq 3$ ,  $\alpha$  peut uniquement prendre l'une des trois formes suivantes dans la décomposition de l'avant-dernier retour :

- (ii)  $\alpha = \beta UD$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_{n-1}$  ;
- (iii)  $\alpha = \beta^{\sharp}$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_n$  ;
- (iv)  $\alpha = \beta \cdot \gamma^{\sharp}$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_{\ell}$  et  $\gamma \in \mathcal{T}_{n-\ell}$  ( $2 \leq \ell \leq n - 2$ ).

Dans le cas (ii), on a  $\mathbf{U}(\beta UD) = 1 + \mathbf{U}(\beta)$ . Or, puisque  $|\beta| = n - 1$ , on a, par hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{U}(\beta) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{U}(\beta UD)} &= 1 + (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(U\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)D) = \boxed{(\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta UD))} \\ &= 1 + (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(U\psi|_{\mathcal{T}_{n-1}}(\beta)D) = \boxed{(\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta UD))}. \end{aligned}$$

Dans le cas (iii), on a  $\mathbf{U}(\beta^\sharp) = 1 + \mathbf{U}(\beta)$ . Or, puisque  $|\beta| = n$ , on a, par hypothèse de récurrence :

$$\mathbf{U}(\beta) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{U}(\beta^\sharp)} &= 1 + (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)F) = \boxed{(\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta^\sharp))} \\ &= 1 + (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_n}(\beta)F) = \boxed{(\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta^\sharp))}. \end{aligned}$$

Le cas (iv) se traite de façon similaire, et on a donc bien montré qu'on a

$$\mathbf{U}(\alpha) = (\mathbf{F} + \mathbf{U})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\alpha)) = (\mathbf{F} + \mathbf{D})(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\alpha))$$

pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}_{n+1}$ .

Pour traiter le second point, on écarte d'abord le cas où  $k = 1$ , puisqu'un cDta. contient autant d'occurrences du motif  $\Delta_1 = UD$  que du motif  $D$  (tout pas vers le bas est en effet nécessairement précédé d'un pas vers le haut, deux pas vers le bas ne pouvant être consécutifs), et on peut alors raisonner de la même manière que dans la première partie de cette démonstration pour montrer qu'on a bien

$$\mathbf{UD}(\alpha) = (\mathbb{1}_{\mathbf{F}} + \mathbf{UFD} + \mathbb{1}_{\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{U}^2\mathcal{M}\mathbf{D}^2)(\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\alpha))$$

pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}_{n+1}$ . On suppose dans la suite qu'on a  $k \geq 2$ , et on affine alors la décomposition de l'avant-dernier retour comme suit :

- (a)  $\alpha = \beta UD$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_{n-1}$ ;
- (b)  $\alpha = \beta \cdot \Delta_{k-1}^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_{n-k} \cup \{\varepsilon\}$ ;
- (c)  $\alpha = \beta \cdot \Delta_k^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}_{n-k-1} \cup \{\varepsilon\}$ ;
- (d)  $\alpha = \beta \cdot (\gamma \cdot \Delta_k)^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$  et  $\gamma \in \mathcal{T}$ ;
- (e)  $\alpha = \beta \cdot \gamma^\sharp$ , avec  $\beta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$  et  $\gamma$  est un cDta. qui n'est ni  $\Delta_{k-1}$ , ni de la forme  $\delta \cdot \Delta_k$  ( $\delta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$ ).

Le cas (b) se traite par exemple de la façon suivante : si  $\beta = \varepsilon$ , alors on a  $k = n$ ,  $\alpha = \Delta_n$ ,  $\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\alpha) = F^n$ , et

$$(\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2)(F^n) = 1,$$

ce qui est la même quantité que  $\Delta_{\mathbf{k}}(\Delta_n)$ . Dans le cas où  $\beta \neq \varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} & (\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2) (\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta\Delta_{k-1}^\#)) \\ &= (\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2) (F^{k-1}U\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)D) \\ &= 0 + \left( \mathbb{1}_{\mathbf{F}^k}(\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)) + \mathbf{UF}^k\mathbf{D}(\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)) \right) + 1 \\ &+ \left( \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}}(\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)) + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2(\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)) \right). \end{aligned}$$

Puisque  $2 \leq |\beta| \leq n-2$ , on a, par hypothèse de récurrence :

$$\Delta_{\mathbf{k}}(\beta) = (\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2) (\psi|_{\mathcal{T}_{|\beta|}}(\beta)),$$

d'où :

$$(\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2) (\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\beta\Delta_{k-1}^\#)) = 1 + \Delta_{\mathbf{k}}(\beta) = \Delta_{\mathbf{k}}(\beta \cdot \Delta_{k-1}^\#).$$

Les quatre autres cas peuvent être traités avec un raisonnement et des calculs similaires. On a donc bien montré qu'on a

$$\Delta_{\mathbf{k}}(\alpha) = (\mathbb{1}_{\mathbf{F}^k} + \mathbf{UF}^k\mathbf{D} + \mathbb{1}_{\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}} + \mathbf{UF}^{k-1}\mathbf{U}\mathcal{M}\mathbf{D}^2) (\psi|_{\mathcal{T}_{n+1}}(\alpha))$$

pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}_{n+1}$  et pour tout  $k \geq 1$ , ce qui achève la récurrence.  $\square$

**Remarque 3.** On peut constater ces transports de statistiques dans l'exemple donné par la figure 3.10. En effet, le cDta. (à gauche) contient par exemple 10 occurrences du motif  $U$ , tandis que son image par  $\psi$  (à droite) contient 10 occurrences combinées des motifs  $F$  et  $U$ , ce qui est cohérent avec la formule annoncée dans le théorème 10 :

$$\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} + \mathbf{U}.$$

De même, l'autre formule

$$\psi|_{\mathcal{T}_n}(\mathbf{Ret}) = \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{DerF}$$

s'applique bel et bien à l'exemple, puisqu'elle donne  $3 = 15 - 12$ .

## 3.7 Distribution et popularité de divers motifs

Dans cette section, on s'intéresse aux motifs que contiennent les cDta. Plus précisément, étant donné un motif  $m$ , on étudiera la série génératrice bivariée

$$M(x, y) = \sum_{n,k} m_{n,k} x^n y^k,$$

où  $m_{n,k} = |(\mathbf{m}|_{\mathcal{T}_n})^{-1}(\{k\})|$  est le nombre de cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  occurrences du motif  $m$ . On en déduira ensuite la popularité du motif  $m$  en calculant la quantité  $\partial_y(M(x, y))|_{y=1}$  (on rappelle que la popularité du motif  $m$  correspond à la donnée, pour tout  $n$ , du nombre d'occurrences totales de  $m$  dans  $\mathcal{T}_n$ , comme évoqué dans la sous-section 2.1.2). Dans la première sous-section, on introduira même une série génératrice trivariée pour faire ce travail.

**Remarque 4.** On peut étudier la famille de motifs  $(UD_i)_{i \geq 1}$  (appelés « pics ») de façon plus directe. En effet, tout cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  pics possède nécessairement  $k$  pas vers le bas, et  $n - k$  pas vers le haut (tous les pas vers le bas étant forcément précédés d'un pas vers le haut, ils se situent exactement à chaque occurrence d'un pic).

Ensuite, tout cDta. de ce type peut être transformé en un chemin de Dyck classique, en « déroulant » chaque trou d'air  $D_i$  en une suite de pas vers le bas consécutifs  $D^i$ . Étant donné qu'un chemin de Dyck possède autant de pas vers le haut que de pas vers le bas, le chemin ainsi obtenu est de longueur  $2(n - k)$  (c.-à-d. de semi-longueur  $n - k$ ).

Ainsi donc, on vient de décrire une bijection entre les cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  pics et les chemins de Dyck de semi-longueur  $n - k$  contenant  $k$  pics (la bijection réciproque consistant à « condenser » toute suite de pas vers le bas consécutifs de la forme  $D^i$  en un trou d'air  $D_i$ ). Ces derniers sont comptés par les nombres de Narayana (cf. [29]). Plus précisément, on en déduit que le nombre de cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  pics est

$$N(n - k, k) = \frac{1}{n - k} \binom{n - k}{k} \binom{n - k}{k - 1}.$$

### 3.7.1 Pas vers le haut $U$ et vers le bas $D_1$

Dans cette sous-section, on souhaite trouver la distribution du motif  $U$ , et celle du motif  $D_1$ . Or, il se trouve qu'une version affinée de la décomposition du premier retour permet d'isoler ces deux motifs de façon plutôt commode. C'est pour cette raison qu'on se permet ici d'introduire la série génératrice *trivariée*  $A$ , définie par

$$A(x, y, z) = \sum_{n \geq 2, k \geq 0, \ell \geq 0} a_{n,k,\ell} x^n y^k z^\ell,$$

où, pour tous  $n \geq 2$  et  $k, \ell \geq 0$ , le coefficient  $a_{n,k,\ell}$  est le nombre de cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  occurrences du motif  $U$  et  $\ell$  occurrences du motif  $D_1$ . On donne ci-après l'expression de la quantité  $A(x, y, z)$ .

**Proposition 11.** On a

$$A(x, y, z) = \frac{1 - xy - x^2yz - 2x^3y^2 + 2x^3y^2z - R}{2xy(1 + x^2y - x^2yz)},$$

avec

$$R = \sqrt{x^4y^2z^2 + 2x^3y^2z - 4x^3y^2 + x^2y^2 - 2x^2yz - 2xy + 1}.$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathcal{T}$ . On va déterminer la contribution de  $\alpha$  dans  $A(x, y, z)$  selon la forme qu'il prend. Pour ce faire, on affine la décomposition du premier retour comme suit :

- (a)  $\alpha = UD\beta$ , avec  $\beta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$  ;
- (b)  $\alpha = U^2D_2\beta$ , avec  $\beta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$  ;
- (c)  $\alpha = (\beta UD)^\# \gamma$ , avec  $\beta \in \mathcal{T}$  et  $\gamma \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$  ;
- (d)  $\alpha = \beta^\# \gamma$ , avec  $\beta$  un cDta. qui n'est pas de la forme  $\delta UD$  ( $\delta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$ ) et  $\gamma \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$ .

Dans le cas (a),  $\alpha$  contient deux pas de plus que  $\beta$ , contient un  $U$  de plus que  $\beta$ , et contient un  $D$  de plus que  $\beta$ . Sa contribution est donc  $x^2yz$  si  $\beta = \varepsilon$ , et  $x^2yzB$  sinon, où  $B$  est alors la contribution du cDta.  $\beta$ .

Dans le cas (b),  $\alpha$  contient trois pas de plus que  $\beta$ , contient deux  $U$  de plus que  $\beta$ , et contient autant de  $D$  que  $\beta$  (on rappelle que  $D = D_1$ ). Sa contribution est donc  $x^3y^2$  si  $\beta = \varepsilon$ , et  $x^3y^2B$  sinon, où  $B$  est alors la contribution du cDta.  $\beta$ .

Dans le cas (c),  $\alpha$  contient trois pas supplémentaires et deux  $U$  supplémentaires par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$ , et ne contient aucun  $D$  supplémentaire (le « nouveau » pas  $D$  disparaissant lors du passage au monté  $(\beta UD)^\#$ ). Sa contribution est donc  $x^3y^2B$  si  $\gamma = \varepsilon$ , et  $x^3y^2B\Gamma$  sinon, où  $B$  (resp.  $\Gamma$ ) est la contribution de  $\beta$  (resp.  $\gamma$ ).

Enfin, dans le cas (d),  $\alpha$  contient un pas supplémentaire et un  $U$  supplémentaire par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$ , et ne contient aucun  $D$  supplémentaire. Sa contribution est donc  $xyB$  si  $\gamma = \varepsilon$ , et  $xyB\Gamma$  sinon, où  $B$  (resp.  $\Gamma$ ) est la contribution de  $\beta$  (resp.  $\gamma$ ). Ici,  $\Gamma$  n'est pas simplement  $A(x, y, z)$  ou  $1 + A(x, y, z)$ , étant donné que  $\gamma$  est un élément de  $\mathcal{T} \setminus \{\delta UD; \delta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}\}$ . En fait, puisque la contribution d'un cDta. de la forme  $\delta UD$  (avec  $\delta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$ ) est  $x^2yz(1 + A(x, y, z))$ , on a :

$$\Gamma = A(x, y, z) - x^2yz(1 + A(x, y, z)).$$

En somme, la série génératrice  $A$  vérifie l'équation suivante (on écrira ici «  $A$  » pour «  $A(x, y, z)$  » afin d'alléger) :

$$A = (x^2yz + x^3y^2 + x^3y^2A + xy(A - x^2yz(1 + A)))(1 + A),$$

qui est polynomiale de degré 2. L'expression de  $A(x, y, z)$  s'obtient alors après résolution.  $\square$

**Corollaire 12.** Pour tout  $k \geq 1$ , le nombre de cDta. (de longueur arbitraire) contenant  $k$  occurrences du motif  $U$  est le  $k^{\text{ème}}$  nombre de Catalan, c.-à-d.

$$\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Ces nombres constituent l'entrée [A000108](#) de [69].

*Démonstration.* En notant  $u_k$  ( $k \geq 0$ ) le nombre de cDta. contenant  $k$  occurrences du motif  $U$ , on a  $u_k = \sum_{n \geq 2} \sum_{\ell \geq 0} a_{n,k,\ell}$ , d'où :

$$\sum_{k \geq 0} u_k y^k = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n \geq 2} \sum_{\ell \geq 0} a_{n,k,\ell} \right) y^k = A(1, y, 1).$$

On vérifie alors que l'expression de  $A(1, y, 1)$  correspond (à un terme initial près) à la série génératrice des nombres de Catalan (cf. l'entrée [A000108](#) de [69]), ce qui signifie que les coefficients  $u_k$  sont bien les nombres de Catalan (pour  $k \geq 1$  uniquement, puisque  $u_0 = 0$ ).  $\square$

**Corollaire 13.** Pour tout  $k \geq 1$ , le nombre de cDta. (de longueur arbitraire) contenant  $k$  occurrences du motif  $U$ , et aucune occurrence du motif  $D$ , est le  $k^{\text{ème}}$  nombre de Riordan, c.-à-d.

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} c_i,$$

où  $c_i = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$  est le  $i^{\text{ème}}$  nombre de Catalan. Ces nombres constituent l'entrée [A005043](#) de [69] (elle compte par exemple les chemins de Motzkin qui n'ont aucun pas vers l'avant  $F$  à altitude 0).

*Démonstration.* En notant  $v_k$  ( $k \geq 0$ ) le nombre de cDta. contenant  $k$  occurrences du motif  $U$ , et aucune occurrence du motif  $D$ , on a :

$$v_k = \sum_{n \geq 2} a_{n,k,0} = \sum_{n \geq 2} \sum_{\ell \geq 0} a_{n,k,\ell} \cdot [\ell = 0],$$

d'où :

$$\sum_{k \geq 0} v_k y^k = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n \geq 2} \sum_{\ell \geq 0} a_{n,k,\ell} \cdot [\ell = 0] \right) y^k = \sum_{n \geq 2} \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{n,k,\ell} y^k 0^\ell = A(1, y, 0).$$

On vérifie alors que l'expression de  $A(1, y, 0)$  coïncide (à un terme initial près) avec la série génératrice des nombres de Riordan (cf. l'entrée [A005043](#) de [69]), ce qui signifie que les coefficients  $v_k$  sont bien les nombres de Riordan (pour  $k \geq 1$  uniquement, puisque  $v_0 = 0$ ).  $\square$

**Corollaire 14.** La popularité du motif  $U$  dans  $\mathcal{T}$  est donnée par la série génératrice d'expression :

$$\frac{1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{2x\sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}.$$

Les coefficients de cette popularité correspondent à un décalage de l'entrée [A110320](#) de [69] (elle compte par exemple le nombre de blocs parmi toutes les structures secondaires d'ARN à  $n$  nœuds).

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{\pi n} \sqrt{14\sqrt{5} - 30}} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

et un équivalent asymptotique du nombre moyen de pas vers le haut  $U$  dans un cDta. typique est :

$$\frac{\sqrt{5} + 5}{10} n \approx 0.723606799 \cdot n.$$

*Démonstration.* Puisque la série génératrice bivariée donnant la distribution du motif  $U$  dans  $\mathcal{T}$  a pour expression  $A(x, y, 1)$ , on calcule la popularité correspondante avec la formule  $\partial_y (A(x, y, 1))|_{y=1}$ , ce qui donne bien l'expression annoncée. De plus, cette dernière coïncide – à un facteur  $\frac{1}{x}$  près – avec la série génératrice de l'entrée [A110320](#) de [69].  $\square$

### 3.7.2 Catastrophes

On rappelle qu'une catastrophe (telles qu'elles sont définies dans [4]) est un pas vers le bas  $D_i$ , avec  $i \geq 2$ , qui finit à altitude 0; on introduit la série génératrice bivariée  $C$ , définie par

$$C(x, y) = \sum_{n \geq 2, k \geq 0} c_{n,k} x^n y^k,$$

où, pour tous  $n \geq 2$  et  $k \geq 0$ , le coefficient  $c_{n,k}$  est le nombre de cDta. de longueur  $n$  contenant  $k$  catastrophes. On donne ci-après l'expression de la quantité  $C(x, y)$ .

**Proposition 15.** On a

$$C(x, y) = \frac{2}{2 - 2x^2 - y(1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1})} - 1.$$

Son développement de Taylor est

$$x^2 + x^3y + x^4(y + 1) + 4x^5y + x^6(y^2 + 6y + 1) + x^7y(2y + 15) + O(x^8),$$

et le triangle de coefficients correspondant n'apparaît pas dans [69].

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathcal{T}$ . On détermine la contribution de  $\alpha$  dans  $C(x, y)$  selon la forme qu'il prend dans la décomposition de l'avant-dernier retour :

- (i) si  $\alpha = UD$ , alors sa contribution est  $x^2$  ;
- (ii) si  $\alpha = \beta \cdot UD$  avec  $\beta \in \mathcal{T}$ , alors sa contribution est  $x^2 B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$  ;
- (iii) si  $\alpha = \beta^\#$  avec  $\beta \in \mathcal{T}$ , alors sa contribution est  $xyC(x, 1)$  (en effet, toutes les éventuelles catastrophes contenues dans  $\beta$  disparaissent lors du passage au monté, et le dernier pas de  $\beta^\#$  constitue alors la seule catastrophe du chemin) ;
- (iv) enfin, si  $\alpha = \beta \cdot \gamma^\#$  avec  $\beta, \gamma \in \mathcal{T}$ , alors sa contribution est  $xy B C(x, 1)$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$ .

En fait, la quantité  $C(x, 1)$  est égale à  $T(x)$  (dont l'expression est donnée dans l'équation (3.2)). En somme, la série génératrice  $C$  vérifie l'équation suivante (on écrira ici «  $C$  » pour «  $C(x, y)$  », et «  $T$  » pour «  $T(x)$  », afin d'alléger) :

$$C = (x^2 + xyT)(1 + C),$$

et on trouve la formule annoncée après résolution. □

**Corollaire 16.** La popularité des catastrophes dans  $\mathcal{T}$  est donnée par la série génératrice d'expression :

$$2 \frac{1 - x - x^2 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}}{(1 + x - x^2 + \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1})^2}.$$

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{\sqrt{14\sqrt{5} - 30}(4 - \sqrt{5})}{4n\sqrt{\pi n}} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1},$$

et un équivalent asymptotique du nombre moyen de catastrophes dans un cDta. typique est :

$$4 - \sqrt{5}.$$

*Démonstration.* Puisque la série génératrice bivariable donnant la distribution des catastrophes dans  $\mathcal{T}$  a pour expression  $C(x, y)$ , on calcule la popularité correspondante avec la formule  $\partial_y (C(x, y))|_{y=1}$ , ce qui donne bien l'expression annoncée. □

### 3.7.3 Pyramides

Pour tout  $k \geq 1$ , une  $k$ -pyramide est une occurrence du motif  $U^k D_k$ , aussi notée  $\Delta_k$ .

**Proposition 17.** Pour tout  $k \geq 1$ , la série génératrice bivariée  $P_k$  donnant la distribution du motif  $\Delta_k$  est donnée par l'expression suivante :

$$P_k(x, y) = \frac{x^{k+1}(y-1) - 2x^{k+2}(y-1) + x^2 + x - 1 + \sqrt{Q}}{2(x^{k+2}(y-1) - x)},$$

avec

$$Q = x^{k+1}(y-1)(x^{k+1}(y-1) + 4x + 2(x^2 - x - 1)) + x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

*Démonstration.* Soient  $k \geq 1$  et  $\alpha \in \mathcal{T}$ . On va déterminer la contribution de  $\alpha$  dans  $P_k(x, y)$  selon la forme qu'il prend. Pour ce faire, on affine la décomposition du premier retour comme suit :

- (a)  $\alpha = \Delta_m \beta$ , avec  $m \in [k-1]$ ;
- (b)  $\alpha = \Delta_k \beta$ ;
- (c)  $\alpha = \Delta_{k+1} \beta$ ;
- (d)  $\alpha = (\gamma \Delta_k)^\sharp \beta$ ;
- (e)  $\alpha = \delta^\sharp \beta$ ,

où  $\beta \in \mathcal{T} \cup \{\varepsilon\}$ , où  $\gamma \in \mathcal{T}$ , et où  $\delta \in \mathcal{T}$  n'est ni de la forme  $\Delta_\ell$  ( $\ell \in [k]$ ), ni de la forme  $\zeta \Delta_k$  ( $\zeta \in \mathcal{T}$ ). Ces cinq cas sont disjoints et recouvrent l'ensemble des cDta.  $\mathcal{T}$ . La contribution de chaque forme de  $\alpha$  dans  $P_k(x, y)$  permet d'établir l'équation fonctionnelle suivante (on écrira ici «  $P_k$  » pour «  $P_k(x, y)$  » afin d'alléger) :

$$P_k = \left( \underbrace{\sum_{i=2}^k x^i}_{(a)} + \underbrace{x^{k+1}y}_{(b)} + \underbrace{x^{k+2}}_{(c)} + \underbrace{x^{k+2}P_k}_{(d)} + x \underbrace{\left( P_k - \sum_{i=2}^k x^i - x^{k+1}y(1+P_k) \right)}_{(e)} \right) (1+P_k),$$

qui est polynomiale de degré 2. L'expression de  $P_k(x, y)$  s'obtient alors après résolution.  $\square$

**Corollaire 18.** Pour tout  $k \geq 1$ , la série génératrice univariée  $Y_k$  donnant la popularité du motif  $\Delta_k$  est donnée par l'expression suivante :

$$Y_k(x) = \frac{x^{k+1}(1 + 2x^2 - x^3 + (1-x)\sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1})}{2\sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}},$$

dont le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Taylor correspond au  $(n-k-2)^{\text{ème}}$  coefficient de l'entrée [A051291](#) de [69]. En particulier, on a  $\Delta_1(\mathcal{T}_n) = \Delta_k(\mathcal{T}_{n+k-1})$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 2$ , ce qui signifie qu'il y a autant de 1-pyramides dans  $\mathcal{T}_n$  qu'il y a de  $k$ -pyramides dans  $\mathcal{T}_{n+k-1}$ .

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\pi n}\sqrt{14\sqrt{5}-30}} \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-k-1},$$

et un équivalent asymptotique du nombre moyen de  $k$ -pyramides dans un cDta. typique est :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot n.$$

*Démonstration.* Pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$Y_k(x) = \partial_y (P_k(x, y)) \Big|_{y=1}.$$

Le calcul donne alors l'expression annoncée.  $\square$

**Remarque 5.** La popularité des 1-pyramides est identique à la popularité des pas vers le bas  $D_1$ , étant donné que chaque pas vers le bas  $D_1$  est nécessairement précédé par un pas vers le haut  $U$ . De plus, pour tout  $k \geq 1$ , la popularité des 1-pyramides et celle des  $k$ -pyramides ne diffèrent que d'un facteur  $x^{k-1}$ , puisque chaque  $k$ -pyramide  $U^k D_k$  dans un cDta. de longueur  $n$  ( $n \geq 2$ ) peut être obtenue à partir d'une 1-pyramide  $UD$  dans un chemin de longueur  $n - (k - 1)$ , à la gauche de laquelle on rajoute  $k - 1$  pas vers le haut  $U$ , et dont on modifie l'amplitude du pas vers le bas  $D_1$  pour obtenir un pas vers le bas  $D_k$ .

En notant  $\Delta_{\geq k}$  (resp.  $\Delta_{\leq k}$ ) le motif  $\sum_{m \geq k} \Delta_m$  (resp.  $\sum_{m=1}^k \Delta_m$ ) pour tout  $k \geq 1$ , on a le résultat suivant.

**Corollaire 19.** Pour tout  $k \geq 1$ , les séries génératrices univariées donnant la popularité des motifs  $\Delta_{\geq k}$  et  $\Delta_{\leq k}$  sont respectivement données par les expressions suivantes :

$$\frac{x^{k-1}}{1-x} Y_1(x) \text{ et } \frac{1-x^k}{1-x} Y_1(x),$$

où  $Y_1$  est la popularité de  $\Delta_1$ . Cela signifie qu'on a

$$\Delta_{\leq k}(\mathcal{T}_{n-k+1}) = \Delta_{\geq k}(\mathcal{T}_n) - \Delta_{\geq k}(\mathcal{T}_{n-k})$$

pour tous  $k \geq 1$  et  $n \geq 2$ .

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$ . Alors la popularité du motif  $\Delta_{\geq k} = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta_i$  est donnée par :

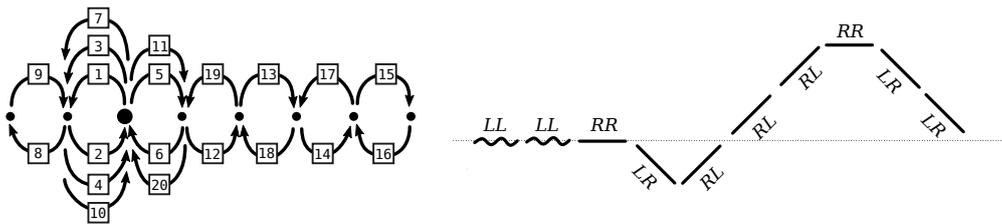
$$\sum_{i=k}^{\infty} Y_i(x) = \sum_{i=k}^{\infty} x^{i-1} Y_1(x) = \frac{x^{k-1}}{1-x} Y_1(x).$$

La popularité du motif  $\Delta_{\leq k} = \sum_{i=1}^k \Delta_i$ , quant à elle, est donnée par :

$$\sum_{i=1}^k Y_i(x) = \sum_{i=1}^k x^{i-1} Y_1(x) = \frac{1-x^k}{1-x} Y_1(x).$$

$\square$

Enfin, on présente un lien entre le motif  $\Delta_{\geq k}$  et les *promenades de Fibonacci de module 2* (ou *d'angle central 180°*, cf. [55, 75]). Une *promenade de Fibonacci d'angle central 180°* est une courbe fermée du plan, composée de deux types d'arcs de 180° d'angle (notés  $L = \smile$  et  $R = \frown$ ), commençant à l'origine du plan par un arc  $L$ , finissant à l'origine du plan (puisque la courbe est fermée), et où les seules éventuelles occurrences du facteur  $LL$  sont au début de la courbe (la promenade commence alors toujours par  $L^k$ , avec  $k \geq 1$ , puis les arcs  $L$  subséquents sont systématiquement isolés). Les arcs sont dessinés bout à bout, c.-à-d. que la suite d'arcs  $LLR$  correspond à .



LL LL RR LR RL RL RL RR LR LR  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

FIGURE 3.11 – Une promenade de  $\mathcal{F}_{20}$ , encodée par la suite d’arcs  $LLLLRRLRRLRLRLRLRLR$ , et le chemin sur réseau associé.

On note alors  $\mathcal{F}_{2n}$  l’ensemble des promenades de Fibonacci d’angle central  $180^\circ$  de longueur  $2n$  – c.-à-d. avec  $2n$  arcs – pour tout  $n \geq 0$ . La figure 3.11 illustre un exemple de promenade de longueur 20, ainsi qu’un chemin sur réseau à laquelle elle est associée. Nous détaillerons le lien entre ces deux objets immédiatement après.

À présent, on définit une application  $\tau$ , qui envoie les mots de longueur 2 sur l’alphabet  $\{L, R\}$  sur les lettres de l’alphabet  $\{U, D, F, \tilde{F}\}$ , de la manière suivante :

$$\tau(a) = \begin{cases} U & \text{si } a = RL; \\ D & \text{si } a = LR; \\ F & \text{si } a = RR; \\ \tilde{F} & \text{si } a = LL. \end{cases}$$

Ensuite, on définit une application  $\mu$  sur l’ensemble  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_{2n}$  des promenades, de la manière suivante :

$$\forall n \geq 0, \forall p \in \mathcal{F}_{2n}, \mu(p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_{2n-1} p_{2n}) = \tau(p_1 p_2) \tau(p_3 p_4) \dots \tau(p_{2n-1} p_{2n}).$$

Les *grands chemins de Motzkin* sont des chemins de Motzkin que l’on autorise à passer sous l’axe des abscisses. En particulier, on note  $U$  (resp.  $F$ , resp.  $D$ ) les pas vers le haut (resp. vers l’avant, resp. vers le bas) qui composent ces chemins. Par exemple,  $DUUDDFDUUUD$  est un grand chemin de Motzkin de longueur 11.

On adopte alors quelques notations, *uniquement valables dans cette sous-section* : pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{G}_n$  est l’ensemble des grands chemins de Motzkin de longueur  $n$  qui évitent le facteur  $UD$ ,  $\mathcal{N}_n$  est l’ensemble des éléments de  $\mathcal{G}_n$  qui commencent par  $D$ , et  $\mathcal{S}_n$  est l’union de  $\mathcal{N}_n$  et de l’ensemble des grands chemins de Motzkin qui évitent le facteur  $UD$ , auxquels on ajoute une suite non vide de pas spéciaux  $\tilde{F}$  en guise de préfixe (la longueur totale de ces chemins étant toujours égale à  $n$ ). Par exemple, le chemin  $\tilde{F}\tilde{F}FDUUUFDD$  est un élément de  $\mathcal{S}_{10}$ .

**Proposition 20.** Pour tout  $n \geq 0$ , l’application  $\mu|_{\mathcal{F}_{2n}}$  est une bijection entre  $\mathcal{F}_{2n}$  et  $\mathcal{S}_n$ .

*Démonstration.* Soit  $n \geq 0$ , et soit  $a \in \mathcal{F}_{2n}$ . Alors  $a$  évite le facteur  $RLLR$ , par définition, ce qui implique que  $\mu(a)$  évite le facteur  $UD$ .

Ensuite, la première lettre de  $\mu(a)$  est soit  $\tilde{F}$ , soit  $D$ , selon que  $a$  commence par plusieurs arcs  $L$  ou par un seul arc  $L$  (alors suivi d’un arc  $R$ ). Dans le cas où  $a$  commence

par  $k$  arcs  $L$  consécutifs, avec  $k \geq 2$ ,  $\mu(a)$  commence par exactement  $\lfloor k/2 \rfloor$  pas spéciaux  $\tilde{F}$ , et ce sont les seules occurrences de la lettre  $\tilde{F}$  dans  $\mu(a)$ , puisque  $a$  ne contient pas le facteur  $LL$ , à part éventuellement au début de la promenade.

Comme la courbe  $a$  est fermée, il y a autant d'occurrences de  $LR$  et de  $RL$  dans l'ensemble des facteurs  $\{a_k a_{k+1}; k = 1, 3, \dots, 2n-1\}$ . Cela signifie que  $\mu(a)$  contient autant d'occurrences de  $U$  et de  $D$ , c.-à-d. que le chemin  $\mu(a)$  finit sur l'axe des abscisses.

Ainsi, le chemin  $\mu(a)$  est bien un élément de  $\mathcal{S}_n$ , et on constate le caractère bijectif de l'application  $\mu$  de façon immédiate à travers l'application  $\tau$ .  $\square$

**Remarque 6.** L'application  $\mu$  ressemble beaucoup à la bijection de [66] entre les « 2-watermelons with arbitrary deviation » et les « weighted Motzkin paths », ce qui suggère que des liens peuvent exister entre les 2-watermelons de Roitner et les promenades de Fibonacci de Luschny et Wienand.

**Proposition 21.** La série génératrice univariée dont le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Taylor correspond au nombre de promenades de Fibonacci de module 2 de longueur  $2n$  est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{Y_1(x)}{x^2(1-x)} - 1.$$

Ainsi, pour tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 2$ , le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Taylor de cette série génératrice correspond au  $(n+k+1)^{\text{ème}}$  coefficient de la popularité du motif  $\Delta_{\geq k}$ , c.-à-d. qu'il y a autant de promenades de Fibonacci de module 2 de longueur  $2n$  qu'il y a de  $m$ -pyramides ( $m \geq k$ ) parmi tous les cDta. de longueur  $n+k+1$ .

Les coefficients correspondants constituent l'entrée [A201631](#) de [69].

*Démonstration.* D'après la proposition 20, il suffit de déterminer l'expression de la série génératrice de  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n$ , puisque  $\mathcal{F}_{2n}$  et  $\mathcal{S}_n$  sont en bijection pour tout  $n \geq 0$ . On note alors momentanément  $\mathcal{G} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{G}_n$ ,  $\mathcal{N} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{N}_n$ , et  $\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n$ . On rappelle également que  $\mathcal{M}$  désigne l'ensemble des chemins de Motzkin sans pic non vides (cf. la sous-section 3.6.1).

Ensuite, on note momentanément  $\mathcal{V}$  l'ensemble des chemins de Motzkin qui évitent le facteur  $DU$ , et  $\bar{\mathcal{V}}$  l'ensemble des chemins obtenus en appliquant la transformation  $U \longleftrightarrow D$  aux chemins de  $\mathcal{V}$ . Par exemple, puisque  $UDFUD$  est un élément de  $\mathcal{V}$ , on a  $DUFDU \in \bar{\mathcal{V}}$ .

Enfin, on note momentanément  $\mathcal{W}$  l'ensemble des suites non vides de pas spéciaux  $\tilde{F}$  (c.-à-d. qu'on a  $\mathcal{W} = \{\tilde{F}, \tilde{F}\tilde{F}, \tilde{F}\tilde{F}\tilde{F}, \dots\}$ ).

Les ensembles  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\bar{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{W}$  ont pour séries génératrices respectives  $M$ ,  $V$ ,  $\bar{V}$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $S$  et  $W$ . On a de façon immédiate :

$$W(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad \bar{V}(x) = V(x).$$

Ensuite, le théorème 9 et l'équation (3.2) donnent :

$$M(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

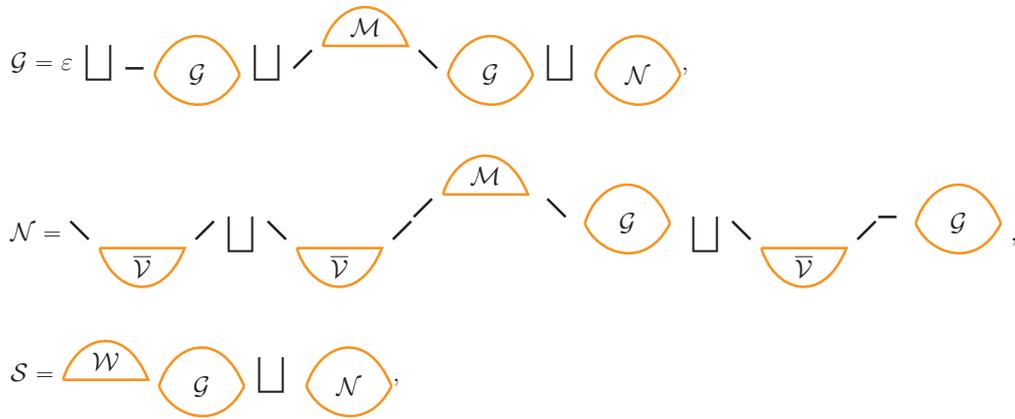
Puis, on constate que les chemins de  $\mathcal{M}_n$  et les chemins de  $\mathcal{V}$  de longueur  $n - 1$  sont en bijection, à travers l'application  $\nu$ , définie récursivement par :

$$\begin{cases} \nu(F) &= \varepsilon; \\ \nu(F\alpha) &= F\nu(\alpha); \\ \nu(U\alpha D) &= U\nu(\alpha)D; \\ \nu(U\alpha D\beta) &= U\nu(\alpha)DF\nu(\beta), \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ . Ainsi, on a :

$$\bar{V}(x) = V(x) = \frac{M(x)}{x} = \frac{T(x)}{x^2}.$$

Enfin, on décompose les ensembles  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{N}$ , et  $\mathcal{S}$  de la manière illustrée ci-après :



ce qui donne lieu au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} G(x) = 1 + xG(x) + x^2M(x)G(x) + N(x); \\ N(x) = x^2V(x) + x^4V(x)M(x)G(x) + x^3V(x)G(x); \\ S(x) = W(x)G(x) + N(x). \end{cases}$$

Après résolution, on trouve l'expression de  $S(x)$ , qui correspond bien à la formule annoncée. ▣

### 3.7.4 Pics

L'étude du motif de cette sous-section et de celle qui la suit emploie des techniques étant en tout point analogues à ce qui a déjà été fait ci-avant. C'est pourquoi, par souci de concision, on ne donnera ici que les énoncés.

On donne d'abord les résultats énumératifs des pics, c.-à-d. du motif  $\sum_{m \geq 1} UD_m$ .

**Proposition 22.** La série génératrice bivariée donnant la distribution du motif  $\sum_{m \geq 1} UD_m$  est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{1 - x - x^2y - \sqrt{(1 - x - x^2y)^2 - 4x^3y}}{2x},$$

ce qui correspond à un décalage de l'entrée [A089732](#) de [69] (elle compte par exemple les chemins de Motzkin sans pic de longueur  $n$  qui ont  $k$  pas vers le haut  $U$ ).

**Corollaire 23.** La série génératrice univariée donnant la popularité du motif  $\sum_{m \geq 1} UD_m$  est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{x(1+x-x^2-\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1})}{2\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1}},$$

ce qui correspond à un décalage de l'entrée [A203611](#) de [69] (elle compte par exemple les grands chemins de Motzkin qui évitent le facteur  $UU$ ).

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{\pi n}\sqrt{14\sqrt{5}-30}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

et un équivalent asymptotique du nombre moyen de pics dans un cDta. typique est :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10}n \sim 0.276393191 \cdot n.$$

### 3.7.5 Retours à l'axe des abscisses

Ici, on entend par « retour à l'axe des abscisses » tout pas vers le bas  $D_m$  ( $m \geq 1$ ) qui finit à altitude 0.

**Proposition 24.** La série génératrice bivariée donnant la distribution des retours à l'axe des abscisses est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{2}{2-y(1-x+x^2-\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1})} - 1,$$

ce qui correspond à l'entrée [A098086](#) de [69] (elle compte par exemple les chemins de Motzkin sans pic de longueur  $n$  dont le  $k^{\text{ème}}$  pas est le premier pas vers l'avant  $F$ ).

**Corollaire 25.** La série génératrice univariée donnant la popularité des retours à l'axe des abscisses est donnée par l'expression suivante :

$$2 \frac{1-x+x^2-\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1}}{(1+x-x^2+\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1})^2},$$

ce qui correspond à l'entrée [A093128](#) de [69].

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{\sqrt{14\sqrt{5}-30}\sqrt{5}}{4n\sqrt{\pi n}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

et un équivalent asymptotique du nombre moyen de retours à l'axe des abscisses dans un cDta. typique est :

$$\sqrt{5}.$$

## 3.8 Sous-ensembles de $\mathcal{T}$

On termine ce chapitre en donnant des exemples de sous-ensembles de  $\mathcal{T}$ , obtenus en rajoutant des contraintes aux cDta., en s'inspirant de ce qui a été fait sur les chemins de Dyck classiques (par exemple dans [5]).

### 3.8.1 Chemins croissants

Le premier exemple qu'on donne est celui des cDta. croissants. Afin d'introduire ces chemins, on commence par définir une *vallée* comme l'occurrence d'un motif de la forme  $D_kU$ , avec  $k \geq 1$ , et on définit l'*altitude* d'une vallée comme l'ordonnée du chemin entre les pas  $D_k$  et  $U$  correspondants. Par exemple, l'unique vallée du cDta.  $UUUUUU_2$  se trouve à altitude 1.

Ensuite, on dit qu'un cDta. est *croissant* lorsque la suite des altitudes de ses vallées est croissante (au sens large). La figure 3.12 illustre la contrainte imposée sur les vallées des cDta. croissants. Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $\mathcal{T}_n^\nearrow$  l'ensemble des cDta. croissants de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{T}^\nearrow = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{T}_n^\nearrow$ .

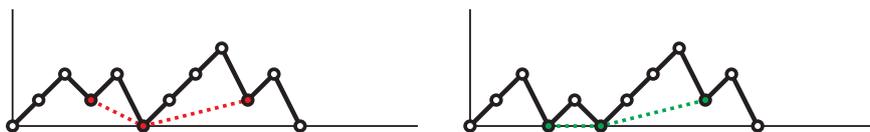


FIGURE 3.12 – Un cDta. non croissant (gauche) et un cDta. croissant (droite).

On donne à présent quelques résultats énumératifs sur les cDta. croissants.

**Théorème 26.** On a  $|\mathcal{T}_2^\nearrow| = 1$ , et  $|\mathcal{T}_n^\nearrow| = 2^{n-3}$  pour tout  $n \geq 3$ .

*Démonstration.* On observe d'abord que l'ensemble  $\mathcal{T}^\nearrow$  se partitionne de la manière suivante :

$$\mathcal{T}^\nearrow = \{UD\} \sqcup \{\alpha^\sharp; \alpha \in \mathcal{T}^\nearrow\} \sqcup \{\Delta_k \cdot \alpha; k \geq 1, \alpha \in \mathcal{T}^\nearrow\}.$$

Soit maintenant  $\alpha \in \mathcal{T}^\nearrow$ . On note  $T^\nearrow$  la série génératrice de  $(|\mathcal{T}_n^\nearrow|)_{n \geq 2}$ , et on détermine la contribution de  $\alpha$  dans  $T^\nearrow(x)$  selon la forme qu'il prend dans la partition donnée ci-avant :

- (i) si  $\alpha = UD$ , alors sa contribution est  $x^2$  ;
- (ii) si  $\alpha = \beta^\sharp$  avec  $\beta \in \mathcal{T}^\nearrow$ , alors sa contribution est  $x \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$  ;
- (iii) enfin, si  $\alpha = \Delta_k \cdot \beta$  avec  $k \geq 1$  et  $\beta \in \mathcal{T}^\nearrow$ , alors sa contribution est  $x^{k+1} \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$ .

On en déduit que  $T^\nearrow$  vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$T^\nearrow(x) = x^2 + x \cdot T^\nearrow(x) + \sum_{k \geq 1} x^{k+1} \cdot T^\nearrow(x).$$

Après résolution, on trouve

$$T^\nearrow(x) = \frac{x^2(1-x)}{1-2x} = x^2 + \frac{x^3}{1-2x},$$

qui vérifie bien  $[x^2]T^\nearrow(x) = 1$ , et  $[x^n]T^\nearrow(x) = 2^{n-3}$  pour tout  $n \geq 3$ . □

**Proposition 27.** Pour tous  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ , le nombre de cDta. croissants de longueur  $n$  contenant  $k$  pics est

$$\binom{n-2}{2(k-1)}.$$

*Démonstration.* Posons  $P^\nearrow(x, y) = \sum_{n \geq 2, k \geq 1} p_{n,k}^\nearrow x^n y^k$ , où, pour tous  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ ,  $p_{n,k}^\nearrow$  est le nombre de cDta. croissants de longueur  $n$  contenant  $k$  pics. Soit  $\alpha \in \mathcal{T}^\nearrow$ . Alors la partition de  $\mathcal{T}^\nearrow$  donnée dans la démonstration du théorème précédent permet de déterminer la contribution de  $\alpha$  dans  $P^\nearrow(x, y)$  :

- (i) si  $\alpha = UD$ , alors sa contribution est  $x^2 y$ ;
- (ii) si  $\alpha = \beta^\#$  avec  $\beta \in \mathcal{T}^\nearrow$ , alors sa contribution est  $x \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$ ;
- (iii) enfin, si  $\alpha = \Delta_k \cdot \beta$  avec  $k \geq 1$  et  $\beta \in \mathcal{T}^\nearrow$ , alors sa contribution est  $x^{k+1} y \cdot B$ , où  $B$  est la contribution de  $\beta$ .

On en déduit que  $P^\nearrow$  vérifie l'équation suivante :

$$P^\nearrow(x, y) = x^2 y + x \cdot P^\nearrow(x, y) + \sum_{k \geq 1} x^{k+1} y \cdot P^\nearrow(x, y).$$

Après résolution, on trouve :

$$P^\nearrow(x, y) = \frac{(1-x)x^2 y}{(1-x)^2 - x^2 y}.$$

En notant  $f(z, t)$  l'expression de la série génératrice de l'entrée [A034839](#) de [69] (elle compte par exemple les compositions de  $n$  qui ont  $k$  parties strictement supérieures à 1), on a  $P^\nearrow(z, t) = z^2 t \cdot f(z, t)$ . Puisque le coefficient d'indices  $(n, k)$  dans cette entrée est  $\binom{n}{2k}$  pour tous  $n \geq 0$  et  $k \geq 0$ , on en déduit que  $p_{n,k}^\nearrow$  vaut  $\binom{n-2}{2(k-1)}$  pour tous  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ .  $\square$

**Corollaire 28.** La popularité des pics dans  $\mathcal{T}_2^\nearrow$  et dans  $\mathcal{T}_3^\nearrow$  est 1, et pour tout  $n \geq 4$ , la popularité des pics dans  $\mathcal{T}_n^\nearrow$  est

$$(n+2) \cdot 2^{n-5}.$$

*Démonstration.* On calcule la popularité en question avec la formule  $\partial_y (P^\nearrow(x, y))|_{y=1}$ , ce qui donne l'expression

$$\frac{x^2(1-x)^3}{(1-2x)^2}.$$

Cette dernière correspond – à un facteur  $x^2$  près – à l'expression de la série génératrice de l'entrée [A045891](#) de [69] (elle compte par exemple le nombre total de facteurs maximaux de la forme  $1^k$  parmi les compositions de  $n+1$ ), dont les deux premiers termes valent tous deux 1, et le  $n^{\text{ème}}$  terme vaut  $(n+4) \cdot 2^{n-3}$  pour tout  $n \geq 2$ . En prenant en compte le facteur multiplicatif  $x^2$  qui décale la suite de deux termes, cela donne bien le résultat annoncé.  $\square$

**Corollaire 29.** Pour tout  $n \geq 4$ , le nombre moyen de pics dans un cDta. croissant de longueur  $n$  est

$$\frac{(n+2) \cdot 2^{n-5}}{2^{n-3}} = \frac{n+2}{4}.$$

### 3.8.2 Chemins bornés

Une autre sous-famille des cDta., peut-être plus naturelle, est celle des cDta. ne dépassant pas une altitude fixée. Plus précisément, pour tous  $t > 0$  et  $n \geq 2$ , on définit  $\mathcal{T}_n^{[0,t]}$

comme l'ensemble des cDta. de longueur  $n$  inclus dans le rectangle  $[0, n] \times [0, t]$ , et on pose  $\mathcal{T}^{[0,t]} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{T}_n^{[0,t]}$ .

Dans toute la sous-section,  $t$  sera un entier strictement positif. Afin d'énumérer les chemins bornés décrits ci-avant, on va établir un système d'équations linéaires vérifié par un ensemble de sous-séries génératrices de  $\mathcal{T}^{[0,t]}$ .

### Résultats énumératifs

Pour tout  $0 \leq k \leq t$ , on note  $f_k^t$  (resp.  $g_k^t$ ) la série génératrice de la suite  $(u_{t,k,n})_{n \geq 2}$  (resp.  $(d_{t,k,n})_{n \geq 2}$ ), où, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_{t,k,n}$  (resp.  $d_{t,k,n}$ ) est le nombre de chemins partiels (c.-à-d. le nombre de préfixes) de  $\mathcal{T}_n^{[0,t]}$  finissant à altitude  $k$  par un pas  $U$  (resp.  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ). La figure 3.13 donne le graphe d'état de ces chemins.

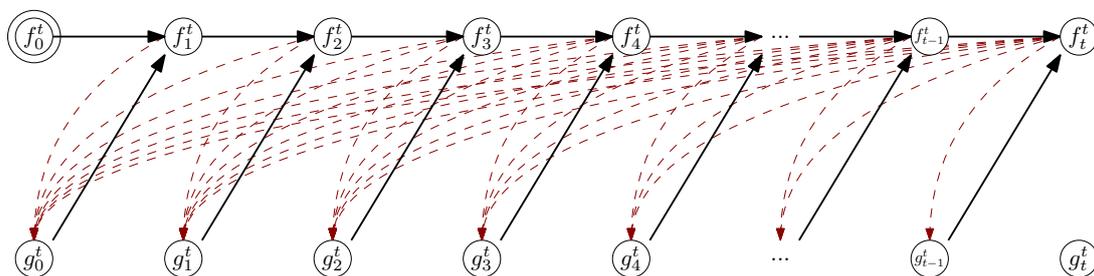


FIGURE 3.13 – Graphe d'état des cDta. ne dépassant pas l'altitude  $t$  partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas.

Ainsi, les fonctions  $f_0^t, \dots, f_t^t, g_0^t, \dots, g_t^t$  vérifient le système d'équations suivant (on écrira «  $f_k^t$  » – resp. «  $g_k^t$  » – pour «  $f_k^t(x)$  » – resp. «  $g_k^t(x)$  » – afin d'alléger) :

$$\begin{cases} \forall 1 \leq k \leq t, & f_k^t = 1 \\ \forall 0 \leq k \leq t-1, & f_k^t = x(f_{k-1}^t + g_{k-1}^t) \\ & g_k^t = x \sum_{i=k+1}^t f_i^t \\ & g_t^t = 0 \end{cases},$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} -1 & & & & 0 & & & \\ x & -1 & & & x & 0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & x & -1 & & & \\ \hline 0 & x & \dots & x & -1 & & & \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ & & \ddots & x & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & & -1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_0^t \\ \vdots \\ f_{t-1}^t \\ f_t^t \\ g_0^t \\ \vdots \\ g_t^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Précisons ici qu'on a délibérément écrit «  $f_0^t = 1$  » (au lieu de «  $f_0^t = 0$  », comme on s'y attendait plutôt). Cela s'explique par le fait que cette modification facilite légèrement les

calculs qui vont suivre. Une fois les expressions des  $f_k^t$  et des  $g_k^t$  trouvées, on prendra soin de retrancher 1 à toutes les expressions qui sont censées contenir  $f_0^t$ .

Pour une altitude maximale fixée  $t \geq 0$ , la matrice carrée de l'équation précédente, d'ordre  $2(t+1)$ , sera notée  $M_t$ . Étant donné que  $M_t$  s'écrit comme la matrice par blocs  $\begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix}$  (où chaque bloc est de taille  $(t+1) \times (t+1)$ ), et puisque  $D_t$  est inversible et que  $C_t$  et  $D_t$  commutent, on en déduit classiquement (cf. [74]) :

$$\det(M_t) = \det(A_t D_t - B_t C_t).$$

En posant à présent  $m_t = \det(M_t)$  pour tout  $t \geq 0$ , on trouve la relation de récurrence suivante :

$$m_{t+2} + (x^2 - x - 1) m_{t+1} + x m_t = 0, \quad (3.7)$$

avec pour conditions initiales :

$$m_0 = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1, \quad \text{et} \quad m_1 = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & x & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 - x^2.$$

Après résolution, on trouve :

$$m_t = \frac{2^t x^{t+1}}{R} \left( \frac{R - x^2 + x - 1}{(R - x^2 + x + 1)^{t+1}} + (-1)^{t+1} \frac{R + x^2 - x + 1}{(R + x^2 - x - 1)^{t+1}} \right), \quad (3.8)$$

avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ . On peut désormais se servir de cette formule pour résoudre l'équation (3.6), en utilisant la règle de Cramer. Pour tout  $0 \leq k \leq t$ , on a ainsi :

$$f_k^t = \frac{\det(M_t[k])}{m_t}, \quad \text{et} \quad g_k^t = \frac{\det(M_t[t+1+k])}{m_t}, \quad (3.9)$$

où  $M_t[k]$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $(k+1)^{\text{ème}}$  colonne de  $M_t$  par le second membre  $[-1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

À présent, en posant  $n_{t,k} = \det(M_t[k])$  pour tous  $t \geq 0$  et  $0 \leq k \leq 2t+1$ , on trouve les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} n_{t,0} = m_t \\ n_{t,k} = x n_{t-1,k-1} & (1 \leq k \leq t) \\ n_{t,t+1} = x^2 n_{t-1,0} + x n_{t-1,t} \\ n_{t,t+k} = x n_{t-1,t+k-2} & (2 \leq k \leq t) \\ n_{t,2t+1} = 0 \end{cases}.$$

Le tableau 3.3 donne les premières valeurs de ces déterminants.

Après résolution des relations de récurrence ci-avant, on peut finalement énumérer les chemins de  $\mathcal{T}^{[0,t]}$ .

**Proposition 30.** Pour tout  $t \geq 1$ , la série génératrice de  $(|\mathcal{T}_n^{[0,t]}|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$g_0^t = \frac{n_{t,t+1}}{m_t}, \quad (3.10)$$

$k \backslash t$	0	1	2	3
0	1	$-x^2 + 1$	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$	$-x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1$
1	0	$x$	$-x^3 + x$	$x^5 - x^4 - 2x^3 + x$
2		$x^2$	$x^2$	$-x^4 + x^2$
3		0	$-x^4 + x^3 + x^2$	$x^3$
4			$x^3$	$x^6 - 2x^5 - x^4 + x^3 + x^2$
5			0	$-x^5 + x^4 + x^3$
6				$x^4$
7				0

TABLEAU 3.3 – Valeurs de  $n_{t,k}$  pour  $0 \leq t \leq 3$  et  $0 \leq k \leq 7$ .

avec

$$n_{t,t+1} = \frac{2^{t+2}x^{t+3}(-1)^t}{R(x^2 - x - 1)^2 - R^3} \left( \frac{1}{(x^2 - x - 1 + R)^t} - \frac{1}{(x^2 - x - 1 - R)^t} \right),$$

$$m_t = \frac{2^t x^{t+1}}{R} \left( \frac{R - x^2 + x - 1}{(R - x^2 + x + 1)^{t+1}} + (-1)^{t+1} \frac{R + x^2 - x + 1}{(R + x^2 - x - 1)^{t+1}} \right),$$

et  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ .

**Exemple 31.** Pour  $t \in [4]$ , on a les expressions suivantes :

$$g_0^1 = \frac{x^2}{1 - x^2}, g_0^2 = \frac{x^2(1 + x - x^2)}{x^4 - x^3 - 2x^2 + 1}, g_0^3 = \frac{x^2(x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1)}{(x^3 - 2x^2 - x + 1)(1 + x - x^3)}, \text{ et}$$

$$g_0^4 = \frac{-x^8 + 3x^7 - 3x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2}{x^8 - 3x^7 - x^6 + 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 1},$$

et les premiers termes des développements de Taylor correspondants sont (respectivement) :

- $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + O(x^{11})$ ;
- $x^2 + x^3 + x^4 + 3x^5 + 2x^6 + 6x^7 + 6x^8 + 11x^9 + 16x^{10} + O(x^{11})$ ;
- $x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 7x^6 + 9x^7 + 22x^8 + 32x^9 + 66x^{10} + O(x^{11})$ ;
- $x^2 + x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 7x^6 + 16x^7 + 27x^8 + 63x^9 + 112x^{10} + O(x^{11})$ .

Les coefficients du premier développement de Taylor (bien que triviaux) correspondent à l'entrée [A000035](#) de [69] (elle ne compte que des choses triviales et/ou peu pertinentes), ceux du deuxième développement à l'entrée [A062200](#) (le paragraphe ci-après donne une bijection avec une famille d'objets combinatoires comptée par cette entrée), tandis que les autres suites d'entiers de cette liste ne correspondent à aucune entrée de l'encyclopédie.

### Bijection avec un ensemble de compositions

Pour tout  $n \geq 0$ , on note (uniquement dans ce paragraphe)  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des compositions de  $n$  dont les parties ont des parités alternantes. Par exemple, on a :

$$\mathcal{C}_3 = \{(3), (1, 2), (2, 1)\}.$$

D'après l'entrée [A062200](#) de [69], la série génératrice de cette famille de compositions est la même – à un facteur  $x^2$  près – que celle des chemins de  $\mathcal{T}^{[0,2]}$ . On va alors donner une bijection entre  $\mathcal{T}^{[0,2]}$  et  $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}_n$ .

Ainsi, on définit l'application  $\vartheta$  sur l'ensemble  $\mathcal{T}^{[0,2]}$  de la manière suivante. On pose tout d'abord  $\vartheta(UD) = \varepsilon$ . Soit maintenant  $n \geq 3$ , et soit  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$ . On réécrit alors  $\tilde{\alpha} = \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$  comme  $B_1 B_2 \dots B_r$ , où les blocs  $B_i$  sont des facteurs de  $\tilde{\alpha}$ , définis par les règles suivantes :

- si  $\tilde{\alpha}$  évite les motifs  $UU$  et  $UD_2$ , alors  $r = 1$  et  $B_1 = \tilde{\alpha}$  ;
- sinon, on place les coupures entre les  $B_i$  et  $B_{i+1}$  au milieu de chaque occurrence de  $UU$  ou de  $UD_2$ .

Par exemple, si  $\alpha = UUD_2UUDUD_2UDUDUUUD_2$ , alors on a  $\tilde{\alpha} = UD_2UUDUD_2UDUDUU$ ,  $r = 5$ ,  $B_1 = U$ ,  $B_2 = D_2U$ ,  $B_3 = UDU$ ,  $B_4 = D_2UDUDU$ , et  $B_5 = U$ . Finalement, on pose :

$$\vartheta(\alpha) = (|B_1|, |B_2|, \dots, |B_r|).$$

La figure 3.14 illustre un exemple de calcul de  $\vartheta(\alpha)$ .

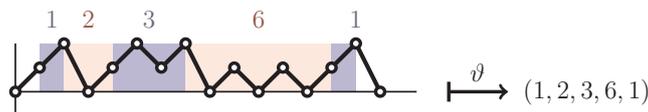


FIGURE 3.14 – L'image par  $\vartheta$  de  $UUD_2UUDUD_2UDUDUUUD_2$  est  $(1, 2, 3, 6, 1)$ .

**Fait.** L'application  $\vartheta$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $\alpha \in \mathcal{T}^{[0,2]}$ , les parties de la composition  $\vartheta(\alpha)$  ont des parités alternantes.

Soit donc  $\alpha \in \mathcal{T}^{[0,2]}$ , tel que  $|\alpha| \geq 3$  (on vérifie immédiatement que  $\vartheta(UD) = \varepsilon$  est bien un élément de  $\mathcal{C}$ ). On écrit  $B_1 B_2 \dots B_r$  la décomposition en blocs de  $\alpha_2 \dots \alpha_{|\alpha|-1}$ , décrite ci-avant. En toute généralité, puisque les chemins de  $\mathcal{T}^{[0,2]}$  sont constitués de pas  $U$ ,  $D$ , ou  $D_2$ , chaque bloc  $B_i$  peut a priori commencer et finir par n'importe laquelle de ces lettres. Toutefois, les règles par lesquelles sont définis les blocs  $B_1, \dots, B_r$  montrent que chaque  $B_i$  ne peut pas commencer par  $D$ , par exemple. En effet, si c'était le cas, la lettre qui précéderait le bloc  $B_i$  serait  $U$  (deux pas vers le bas ne pouvant être consécutifs) ; or, le motif  $UD$  ainsi présent ne devrait pas être scindé dans deux blocs distincts (ce sont les motifs  $UU$  et  $UD_2$  qui se retrouvent ainsi séparés).

En raisonnant de cette manière, on en déduit que chaque bloc  $B_i$  commence par  $U$  et finit par  $U$ , ou bien qu'il commence par  $D_2$  et finit par  $U$ . Dans le premier cas,  $B_i$  est alors de la forme  $U(DU)^k$ , avec  $k \geq 0$  (les motifs  $UU$  et  $UD_2$  ne pouvant pas apparaître à l'intérieur du bloc), et  $B_{i-1}$  est alors de la forme  $D_2(UD)^\ell U$ , avec  $\ell \geq 0$  ( $B_{i-1}$  se finit par  $U$  pour faire apparaître  $UU$  entre les deux blocs, ce qui implique qu'il commence par  $D_2$ , sans quoi le chemin sortirait du domaine  $\mathbb{N} \times [0, 2]$ ). Cela montre que  $|B_{i-1}|$  est pair, tandis que  $|B_i|$  est impair. Dans le second cas, les rôles de  $B_i$  et  $B_{i-1}$  sont inversés, et on conclut également que  $|B_{i-1}|$  et  $|B_i|$  ont des parités opposées.

In fine,  $\vartheta(\alpha)$  est bien un élément de  $\mathcal{C}$ , ce qui montre l'inclusion  $\vartheta(\mathcal{T}^{[0,2]}) \subset \mathcal{C}$ . □

**Théorème 32.** L'application  $\vartheta : \mathcal{T}^{[0,2]} \longrightarrow \mathcal{C}$  est bijective. De plus, pour tout  $n \geq 2$ , la restriction  $\vartheta|_{\mathcal{T}_n^{[0,2]}}$  est une bijection entre  $\mathcal{T}_n^{[0,2]}$  et  $\mathcal{C}_{n-2}$ .

*Démonstration.* On va d'abord montrer le second point. Soient alors  $n \geq 2$  et  $\beta \in \mathcal{C}_{n-2}$ , et montrons qu'il existe  $\alpha \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$  vérifiant  $\vartheta(\alpha) = \beta$ . Le cas  $n = 2$  étant immédiat ( $UD$  est le seul élément de  $\mathcal{T}_2^{[0,2]}$ ,  $\varepsilon$  est le seul élément de  $\mathcal{C}_0$ , et on a bien  $\vartheta(UD) = \varepsilon$ ), on suppose dans la suite qu'on a  $n \geq 3$ . Alors  $\beta$  n'est pas la composition vide, et on note  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ , avec  $r \geq 1$ .

Si  $r = 1$  (c.-à-d.  $\beta_1 = n - 2$ ), alors en posant  $\alpha = U(DU)^{\beta_1/2}D \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$  dans le cas où  $\beta_1$  est pair, et  $\alpha = U(UD)^{(\beta_1-1)/2}UD_2 \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$  sinon, on vérifie qu'on a bien  $\vartheta(\alpha) = \beta$ .

Supposons alors qu'on a  $r \geq 2$ . On va alors considérer les quatre cas suivants :

- (i)  $\beta_1$  et  $\beta_r$  sont tous les deux pairs ;
- (ii)  $\beta_1$  est pair, tandis que  $\beta_r$  est impair ;
- (iii)  $\beta_1$  et  $\beta_r$  sont tous les deux impairs ;
- (iv)  $\beta_1$  est impair, tandis que  $\beta_r$  est pair.

On définit alors, selon le cas correspondant, le chemin  $\alpha \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$  comme suit.

Cas (i) :

$$\alpha = U (DU)^{\beta_1/2} (UD)^{(\beta_2-1)/2}U D_2U(DU)^{(\beta_3-2)/2} \dots D_2U(DU)^{(\beta_r-2)/2} D ;$$

Cas (ii) :

$$\alpha = U (DU)^{\beta_1/2} (UD)^{(\beta_2-1)/2}U D_2U(DU)^{(\beta_3-2)/2} \dots (UD)^{(\beta_r-1)/2}U D_2 ;$$

Cas (iii) :

$$\alpha = U (UD)^{(\beta_1-1)/2}U D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} (UD)^{(\beta_3-1)/2}U \dots (UD)^{(\beta_r-1)/2}U D_2 ;$$

Cas (iv) :

$$\alpha = U (UD)^{(\beta_1-1)/2}U D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} (UD)^{(\beta_3-1)/2}U \dots D_2U(DU)^{(\beta_r-2)/2} D.$$

On vérifie alors qu'on a bien  $\vartheta(\alpha) = \beta$  dans chaque situation.

On a finalement montré que l'application  $\vartheta$  induit une surjection de  $\mathcal{T}_n^{[0,2]}$  vers  $\mathcal{C}_{n-2}$ , pour tout  $n \geq 2$ . Or, d'après l'entrée [A062200](#) de [69], la série génératrice de  $(|\mathcal{C}_n|)_{n \geq 0}$  est – à un facteur  $x^2$  près – égale à celle des chemins de  $\mathcal{T}^{[0,2]}$  (cf. l'exemple 34). Cela signifie que les cardinaux  $|\mathcal{T}_n^{[0,2]}$  et  $|\mathcal{C}_{n-2}|$  sont finis et égaux pour tout  $n \geq 2$ . On en déduit alors finalement que la surjection  $\vartheta|_{\mathcal{T}_n^{[0,2]}} : \mathcal{T}_n^{[0,2]} \longrightarrow \mathcal{C}_{n-2}$  est une bijection, pour tout  $n \geq 2$ .

Enfin, la bijectivité de l'application  $\vartheta : \mathcal{T}^{[0,2]} \longrightarrow \mathcal{C}$  s'obtient par le fait qu'on a  $\mathcal{T}^{[0,2]} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{T}_n^{[0,2]}$  et  $\mathcal{C} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{C}_{n-2}$ . □

# Chapitre 4

## Grands chemins de Dyck avec trous d'air

Ce chapitre porte sur une première généralisation des chemins de Dyck avec trous d'air, à savoir : les *grands* chemins de Dyck avec trous d'air. Leur étude est conduite de façon similaire à ce qui est fait dans le chapitre 3.

Les travaux exposés dans ce chapitre correspondent à l'article [13], qui a fait l'objet d'une publication.

### 4.1 Définitions et notations

Un *grand chemin de Dyck avec trous d'air* (abrégé dans la suite du document en « gcDta. ») est un chemin non vide sur la moitié Est de  $\mathbb{Z}^2$ , commençant à l'origine, finissant sur l'axe des abscisses, et composé de pas vers le haut  $U = (1, 1)$  et vers le bas  $D_k = (1, -k)$ ,  $k \geq 1$ , de telle sorte que deux pas vers le bas ne sont jamais consécutifs. En somme, un gcDta. est un cDta. qui peut éventuellement passer sous l'axe des abscisses. La figure 4.1 donne un exemple de représentation graphique de gcDta.

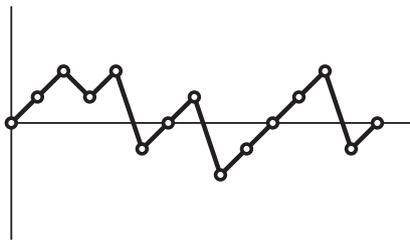


FIGURE 4.1 – Le gcDta.  $UUDUD_3UUD_3UUUUD_3U$ .

On appellera *longueur* d'un gcDta. son nombre de pas, et on notera  $|\alpha|$  la longueur du gcDta.  $\alpha$ . Enfin, on notera  $\mathcal{G}_n$  l'ensemble des gcDta. de longueur  $n$ . Par définition, on a  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1 = \emptyset$ , et on pose  $\mathcal{G} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{G}_n$ .

On dira qu'un gcDta. est *premier positif* si c'est un cDta. premier, c.-à-d. qu'il commence par  $U$ , finit par  $D_k$  avec  $k \geq 2$ , et revient sur l'axe des abscisses une seule fois (à la toute fin). On rappelle alors que l'ensemble des cDta. premiers (et donc des gcDta. premiers positifs) de longueur  $n$  est noté  $\mathcal{P}_n$ , et qu'on a posé  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 3} \mathcal{P}_n$ .

Parallèlement, on dira qu'un gcDta.  $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  est *premier négatif* si le chemin  $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$  est premier positif. Graphiquement, un gcDta. premier négatif commence par  $D_k$  avec  $k \geq 2$ , finit par  $U$ , et revient sur l'axe des abscisses une seule fois (à la toute fin). L'ensemble des gcDta. premiers négatifs de longueur  $n$  sera noté  $\overline{\mathcal{P}}_n$ . Le chemin  $DU$  n'étant par définition pas premier négatif, on pose  $\overline{\mathcal{P}} = \bigcup_{n \geq 3} \overline{\mathcal{P}}_n$ .

On termine cette section en définissant d'autres sous-ensembles de  $\mathcal{G}$  :

- $\mathcal{G}^+$  est l'ensemble des gcDta. commençant par  $U$  ;
  - $\mathcal{G}^{++}$  est l'ensemble des chemins de  $\mathcal{G}^+$  finissant par  $U$  ;
  - $\mathcal{G}^{+-}$  est l'ensemble des chemins de  $\mathcal{G}^+$  finissant par  $D_k$  ( $k \geq 1$ ) ;
- $\mathcal{G}^-$  est l'ensemble des gcDta. commençant par  $D_k$  ( $k \geq 1$ ) ;
  - $\mathcal{G}^{-+}$  est l'ensemble des chemins de  $\mathcal{G}^-$  finissant par  $U$  ;
  - $\mathcal{G}^{--}$  est l'ensemble des chemins de  $\mathcal{G}^-$  finissant par  $D_k$  ( $k \geq 1$ ).

Bien entendu, on a  $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}^{++} \sqcup \mathcal{G}^{+-}$ ,  $\mathcal{G}^- = \mathcal{G}^{-+} \sqcup \mathcal{G}^{--}$ , et  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \sqcup \mathcal{G}^-$ . Enfin, pour tout  $n \geq 2$ , on notera  $\mathcal{G}_n^+$  (resp.  $\mathcal{G}_n^{++}$ ,  $\mathcal{G}_n^{+-}$ ,  $\mathcal{G}_n^-$ ,  $\mathcal{G}_n^{-+}$ ,  $\mathcal{G}_n^{--}$ ) l'ensemble des chemins de  $\mathcal{G}^+$  (resp.  $\mathcal{G}^{++}$ ,  $\mathcal{G}^{+-}$ ,  $\mathcal{G}^-$ ,  $\mathcal{G}^{-+}$ ,  $\mathcal{G}^{--}$ ) de longueur  $n$ .

## 4.2 Énumération

Afin d'énumérer les gcDta., on commence par énumérer les chemins de  $\mathcal{G}^+$  et ceux de  $\mathcal{G}^-$ , avant de sommer les résultats obtenus. On note  $G^+$  (resp.  $G^{++}$ ,  $G^{+-}$ ,  $G^-$ ,  $G^{-+}$ ,  $G^{--}$ ) la série génératrice de  $(|\mathcal{G}_n^+|)_{n \geq 2}$  (resp.  $(|\mathcal{G}_n^{++}|)_{n \geq 2}$ ,  $(|\mathcal{G}_n^{+-}|)_{n \geq 2}$ ,  $(|\mathcal{G}_n^-|)_{n \geq 2}$ ,  $(|\mathcal{G}_n^{-+}|)_{n \geq 2}$ ,  $(|\mathcal{G}_n^{--}|)_{n \geq 2}$ ).

Tout d'abord, tout chemin  $\alpha \in \mathcal{G}^{++}$  prend l'une des deux formes suivantes :

- (i)  $\alpha = \beta \cdot \gamma$ , où  $\beta \in \mathcal{G}^{++}$  et  $\gamma \in \overline{\mathcal{P}} \cup \{DU\}$  ;
- (ii)  $\alpha = \beta \oplus_D \gamma$ , où  $\beta \in \mathcal{G}^{+-}$ ,  $\gamma \in \overline{\mathcal{P}} \cup \{DU\}$ , et  $(xD_i) \oplus_D (D_jy)$  est défini comme valant  $xD_{i+j}y$  pour tous  $i, j > 0$ .

Ensuite, tout chemin  $\alpha \in \mathcal{G}^{+-}$  s'écrit de façon unique comme la concaténation  $\beta \cdot \gamma$  de  $\beta \in \mathcal{G}^+ \cup \{\varepsilon\}$  et de  $\gamma \in \mathcal{P} \cup \{UD\}$  (le dernier pas de  $\beta$  correspondant alors à l'avant-dernier retour à l'axe des abscisses de  $\alpha$ ).

Enfin, on rappelle qu'on a  $\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}^{++} \sqcup \mathcal{G}^{+-}$ . En outre, les séries génératrices de  $(|\mathcal{P}_n|)_{n \geq 3}$  et de  $(|\overline{\mathcal{P}}_n|)_{n \geq 3}$  sont égales, puisque l'application

$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \longmapsto \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$$

est une bijection entre  $\mathcal{P}_n$  et  $\overline{\mathcal{P}}_n$  pour tout  $n \geq 3$ . De même, puisque les ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}^\#$  sont égaux, l'expression des séries génératrices précédentes est  $x \cdot T(x)$ , où l'expression de  $T(x)$  est donnée dans l'équation (3.2).

Ces considérations nous permettent de déduire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} G^{++}(x) &= G^{++}(x)(x^2 + x \cdot T(x)) + \frac{1}{x}G^{+-}(x)(x^2 + x \cdot T(x)) \\ G^{+-}(x) &= (1 + G^+(x))(x^2 + x \cdot T(x)) \\ G^+(x) &= G^{++}(x) + G^{+-}(x) \end{cases}.$$

Après résolution, on trouve les expressions suivantes :

$$G^{++}(x) = \frac{(1-x-x^2)\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1}-x^4+2x^3+x^2+2x-1}{2x^4-4x^3-2x^2-4x+2},$$

$$G^{+-}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1}},$$

$$G^+(x) = \frac{(1-x+x^2)\sqrt{x^4-2x^3-x^2-2x+1}-x^4+2x^3+x^2+2x-1}{2x^4-4x^3-2x^2-4x+2}.$$

Ensuite, tout chemin  $\alpha \in \mathcal{G}^-$  s'écrit de façon unique comme la concaténation  $\beta \cdot \gamma$  de  $\beta \in \overline{\mathcal{P}} \cup \{DU\}$  et de  $\gamma \in \mathcal{G} \cup \{\varepsilon\}$  (le dernier pas de  $\beta$  correspondant alors au premier retour à l'axe des abscisses de  $\alpha$ ). Enfin, on rappelle qu'on a  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \sqcup \mathcal{G}^-$ .

On en déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} G^-(x) &= (x^2 + x \cdot T(x))(1 + G(x)) \\ G(x) &= G^+(x) + G^-(x) \end{cases}.$$

Après résolution, on obtient

$$G^-(x) = \frac{2x^2 R}{(1+x+x^2)(1-3x+x^2)(1+x-x^2+R)},$$

où  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ , et

$$G(x) = \frac{x((1+2x+2x^2-x^3)R+x^5-3x^4+x^3-x^2+3x-1)}{(1+x+x^2)(1-3x+x^2)(1+x-x^2+R)}, \quad (4.1)$$

toujours avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ . Le développement de Taylor de  $G(x)$  est

$$2x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 17x^5 + 40x^6 + 97x^7 + O(x^8),$$

et ses coefficients coïncident – à un terme initial près – avec l'entrée [A051291](#) de [69].

Enfin, par souci d'exhaustivité, on finit par calculer les expressions de  $G^{-+}(x)$  et de  $G^{--}(x)$ . Tout chemin  $\alpha \in \mathcal{G}^{-+}$  s'écrit comme la concaténation  $\beta \cdot \gamma$  de  $\beta \in \overline{\mathcal{P}} \cup \{DU\}$  et de  $\gamma \in \mathcal{G}^{++} \cup \mathcal{G}^{-+} \cup \{\varepsilon\}$ , d'où :

$$G^{-+}(x) = (x^2 + x \cdot T(x)) \cdot (1 + G^{++}(x) + G^{-+}(x)),$$

soit, après résolution :

$$G^{-+}(x) = \frac{x^2((1+x-x^2)R+x^4-2x^3-x^2-2x+1)}{(1+x+x^2)(1-3x+x^2)(1+x-x^2+R)},$$

avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ . Ensuite, puisqu'on a  $\mathcal{G}^- = \mathcal{G}^{-+} \sqcup \mathcal{G}^{--}$ , on en déduit  $G^{--}(x) = G^-(x) - G^{-+}(x)$ , soit :

$$G^{--}(x) = \frac{x^2((1-x+x^2)R-x^4+2x^3+x^2+2x-1)}{(1+x+x^2)(1-3x+x^2)(1+x-x^2+R)}.$$

### 4.3 Préfixes

On note  $\mathcal{G}'_n$  l'ensemble des gcDta. partiels de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{G}' = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{G}'_n$ .

Afin d'énumérer les gcDta. partiels finissant à une altitude fixée, on réintroduit les notations  $f_k$  et  $g_k$  (pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ) du chapitre précédent. Ici, donc, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f_k$  (resp.  $g_k$ ) est la série génératrice des gcDta. partiels finissant à altitude  $k$  par un pas  $U$  (resp.  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ).

La section précédente donne notamment les expressions de  $f_0$  et  $g_0$  :

$$f_0(x) = G^{++}(x) + G^{-+}(x), \quad \text{et} \quad g_0(x) = G^{+-}(x) + G^{--}(x).$$

Comme dans le chapitre précédent, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on écrira «  $f_k$  » (resp. «  $g_k$  ») pour «  $f_k(x)$  » (resp. «  $g_k(x)$  ») afin d'alléger.

Maintenant, fixons une altitude positive  $k > 0$ . Tout gcDta. partiel finissant à altitude  $k$  est alors de la forme  $\alpha \cdot \beta$ , où  $\alpha \in \mathcal{G}^{++} \cup \mathcal{G}^{-+} \cup \{\varepsilon\}$ , et où  $\beta$  est un cDta. partiel finissant à altitude  $k$ . Ainsi, la série génératrice  $f_k + g_k$  des gcDta. partiels finissant à altitude  $k > 0$  est donnée par :

$$f_k + g_k = (1 + f_0) \cdot T_k,$$

où  $T_k$  est la série génératrice des cDta. partiels finissant à altitude  $k$ , dont l'expression est donnée par l'équation (3.4). Après simplification on trouve l'expression suivante :

$$\forall k > 0, \quad f_k + g_k = \frac{R(1-x-x^2+R)(1+x-x^2-R)}{2x(1+x+x^2)(1-3x+x^2)(1+x-x^2+R)} \left( \frac{1+x-x^2-R}{2} \right)^k,$$

avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ . À présent, intéressons-nous aux gcDta. partiels finissant à altitude négative  $-k < 0$ . Tout chemin de ce type est soit de la forme  $\varrho(\beta)$ , soit  $\alpha \oplus_D \varrho(\beta)$ , où  $\alpha \in \mathcal{G}^{+-} \cup \mathcal{G}^{--}$ , où  $\beta$  est un cDta. sinistroverse partiel finissant à altitude  $k > 0$ , et où  $\varrho$  est définie par :

$$\varrho(U_\ell) = D_\ell, \quad \varrho(D) = U, \quad \text{et} \quad \varrho(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \varrho(\alpha_1) \dots \varrho(\alpha_n),$$

pour tous  $\ell, n \geq 1$  et tout cDta. sinistroverse partiel  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ . Ainsi, on en déduit que la série génératrice des gcDta. partiels finissant à altitude  $-k < 0$  est donnée par :

$$f_{-k} + g_{-k} = S_k + \frac{g_0 \cdot S_k}{x} = S_k \left( 1 + \frac{g_0}{x} \right),$$

où  $S_k$  est la série génératrice des cDta. sinistroverses partiels finissant à altitude  $k > 0$ , dont l'expression est donnée par l'équation (3.5). Après simplification, on trouve l'expression suivante :

$$\forall k > 0, \quad f_{-k} + g_{-k} = \frac{((1+x-x^2)R + R^2 + 2x)(1-x-x^2-R)}{xR(1+x-x^2+R)(1+x-x^2-R)} \left( \frac{1+x-x^2-R}{2x} \right)^k,$$

avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ .

Pour terminer, on donne dans le tableau 4.1 quelques exemples de développements de Taylor de gcDta. partiels finissant à une altitude donnée.

Les coefficients de la première ligne correspondent à l'entrée [A110320](#) de [69], ceux de la deuxième à l'entrée [A110236](#) (elle compte par exemple la popularité du motif  $F$  chez les chemins de Motzkin sans pic), ceux de la troisième à l'entrée [A051291](#), tandis que les autres suites d'entiers du tableau ne correspondent à aucune entrée de l'encyclopédie.

$k$	$f_k(x) + g_k(x)$
-2	$x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^4 + 32x^5 + 80x^6 + 201x^7 + 505x^8 + 1273x^9 + O(x^{10})$
-1	$x + 2x^2 + 4x^3 + 10x^4 + 24x^5 + 58x^6 + 143x^7 + 354x^8 + 881x^9 + O(x^{10})$
0	$2x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 17x^5 + 40x^6 + 97x^7 + 238x^8 + 587x^9 + O(x^{10})$
1	$x + 3x^3 + 4x^4 + 11x^5 + 26x^6 + 62x^7 + 152x^8 + 374x^9 + O(x^{10})$
2	$x^2 + 4x^4 + 5x^5 + 16x^6 + 37x^7 + 91x^8 + 226x^9 + O(x^{10})$

TABLEAU 4.1 – Développement de Taylor de  $f_k + g_k$ , pour  $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

## 4.4 Sous-ensembles de $\mathcal{G}$

Dans cette section, on s'intéresse à des sous-familles de gcDta., en imposant diverses contraintes sur l'altitude des chemins. Dans la première sous-section, on étudie les gcDta. minorés par une altitude négative, puis on étudie les gcDta. bornés dans la seconde sous-section.

### 4.4.1 Chemins minorés par une altitude négative

Dans cette sous-section, on fixe  $m < 0$ , et on considère l'ensemble des gcDta. dont l'altitude reste supérieure ou égale à  $m$  à tout moment (si  $m = 0$ , ce sont exactement les cDta.). On appellera par la suite ces chemins des gcDta. *minorés par  $m$* , et on va à présent énumérer les gcDta. minorés par  $m$  partiels. On notera  $\mathcal{G}_n^{[m, +\infty[}$  l'ensemble des gcDta. minorés par  $m$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{G}^{[m, +\infty[} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{G}_n^{[m, +\infty[}$ . On notera  $\mathcal{G}'_n^{[m, +\infty[}$  l'ensemble des préfixes de  $\mathcal{G}^{[m, +\infty[}$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{G}'^{[m, +\infty[} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}'_n^{[m, +\infty[}$ .

Encore une fois, on réintroduit les notations  $f_k$  et  $g_k$  (pour tout  $k \geq m$ ) déjà utilisée précédemment. Ici, donc, pour tout  $k \geq m$ ,  $f_k$  (resp.  $g_k$ ) est la série génératrice des gcDta. minorés par  $m$  partiels finissant à altitude  $k$  après un pas  $U$  (resp.  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ), et l'on écrira «  $f_k$  » (resp. «  $g_k$  ») pour «  $f_k(x)$  » (resp. «  $g_k(x)$  ») afin d'alléger. Ces dernières vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f_m = 0 \\ \forall k \geq m+1, f_k = [k=0] + x(f_{k-1} + g_{k-1}) \\ \forall k \geq m, g_k = x \sum_{i=1}^{\infty} f_{k+i} \end{cases} .$$

Une fois de plus, on a préféré écrire «  $f_0 = 1 + x(f_{-1} + g_{-1})$  » plutôt que «  $f_0 = x(f_{-1} + g_{-1})$  », afin que la méthode du noyau puisse s'appliquer dans les calculs qui suivent. On prendra soin de retrancher 1 aux développements de Taylor qui font intervenir la quantité  $f_0(x)$ . La figure 4.2 donne le graphe d'état correspondant au système précédent.

Maintenant, en posant  $F(u) = \sum_{k \geq m} f_k u^k$  et  $G(u) = \sum_{k \geq m} g_k u^k$ , et en réinjectant le système précédent dans ces formules, on obtient :

$$\begin{cases} F(u) = 1 + xu(F(u) + G(u)) \\ G(u) = \frac{x}{1-u}(u^m F(1) - F(u)) \end{cases} . \quad (4.2)$$

En exprimant tout en fonction de  $F$ , on a :

$$F(u) = 1 + \frac{x^2 u^{m+1}}{1-u} F(1) + xu \left(1 - \frac{x}{1-u}\right) F(u),$$

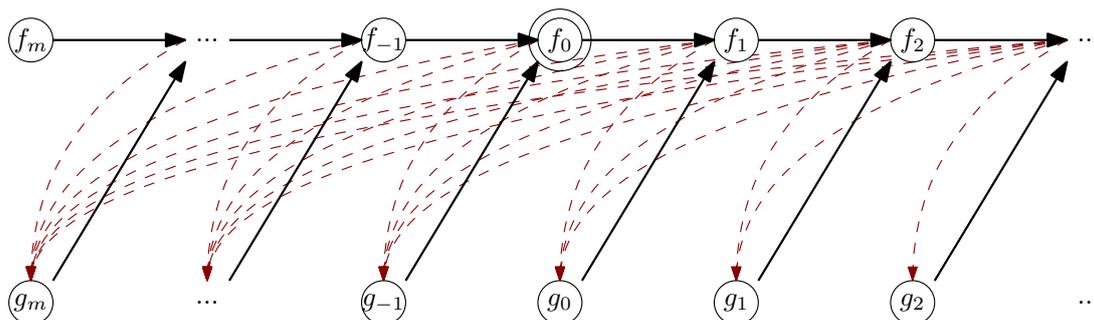


FIGURE 4.2 – Graphe d'état des gcDta. minorés par  $m$  partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas.

ou encore :

$$F(u) = \frac{1 - u + x^2 u^{m+1} F(1)}{xu^2 + (x^2 - x - 1)u + 1}.$$

Les racines (en  $u$ ) du dénominateur avaient déjà été calculées précédemment (cf. l'équation (3.3)). Après application de la méthode du noyau, on trouve l'expression de  $F(1)$ , ce qui permet de résoudre le système (4.2), et ainsi d'obtenir la série génératrice des chemins partiels de  $\mathcal{G}^{[m,+\infty[}$ .

**Proposition 33.** Pour tout  $m < 0$ , la série génératrice de  $(|\mathcal{G}'_n^{[m,+\infty[}|)_{n \geq 1}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(1) - 1 + G(1) = \frac{r_-^{-m} - r_-^{-1-m} - x^2 - x^3}{x^3},$$

où l'expression de  $r_-$  est donnée par l'équation (3.3).

**Exemple 34.** Pour  $m = -1, -2$ , les premiers termes des développements de Taylor correspondants sont (respectivement) :

- $2x + 4x^2 + 8x^3 + 17x^4 + 37x^5 + 82x^6 + 185x^7 + 423x^8 + 978x^9 + 2283x^{10} + O(x^{11})$ ;
- $3x + 6x^2 + 13x^3 + 29x^4 + 65x^5 + 148x^6 + 341x^7 + 793x^8 + 1860x^9 + 4395x^{10} + O(x^{11})$ .

Les coefficients de ces développements correspondent respectivement aux entrées [A004148](#) et [A093128](#) de [69].

#### 4.4.2 Chemins bornés

Dans cette sous-section, on fixe  $t > 0$ , et on s'intéresse aux gcDta. dont l'altitude reste comprise entre  $-t$  et  $t$ . On appellera par la suite ces chemins des gcDta. *dans le tube de rayon  $t$* . On notera  $\mathcal{G}_n^{[-t,t]}$  l'ensemble des gcDta. dans le tube de rayon  $t$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{G}^{[-t,t]} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{G}_n^{[-t,t]}$ . On notera  $\mathcal{G}'_n^{[-t,t]}$  l'ensemble des préfixes de  $\mathcal{G}^{[-t,t]}$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{G}'^{[-t,t]} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}'_n^{[-t,t]}$ .

Afin d'énumérer les chemins de  $\mathcal{G}^{[-t,t]}$ , on va établir un système d'équations linéaires vérifié par un ensemble de sous-séries génératrices de  $\mathcal{G}^{[-t,t]}$ , d'une manière analogue à ce qui est fait dans la sous-section 3.8.2.

**Résultats énumératifs**

Pour tout  $-t \leq k \leq t$ , on note  $f_k^t$  (resp.  $g_k^t$ ) la série génératrice de la suite  $(u_{t,k,n})_{n \geq 2}$  (resp.  $(d_{t,k,n})_{n \geq 2}$ ), où, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_{t,k,n}$  (resp.  $d_{t,k,n}$ ) est le nombre de chemins de  $\mathcal{G}_n^{[-t,t]}$  finissant à altitude  $k$  par un pas  $U$  (resp.  $D_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ ). La figure 4.3 donne le graphe d'état de ces chemins.

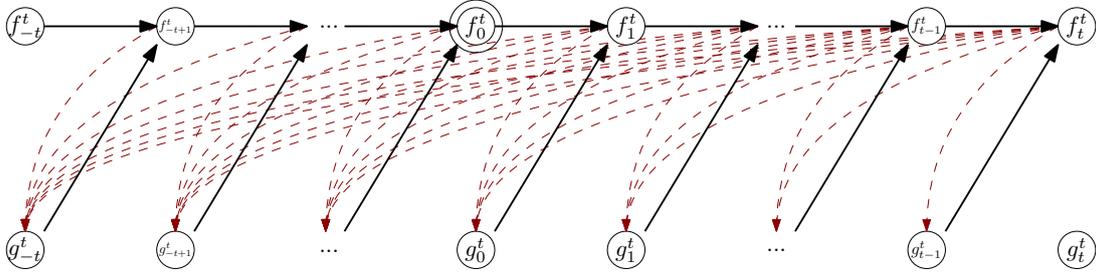


FIGURE 4.3 – Graphe d'état des gcDta. dans le tube de rayon  $t$  partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas.

Ainsi, les fonctions  $f_{-t}^t, \dots, f_t^t, g_{-t}^t, \dots, g_t^t$  vérifient le système d'équations suivant (on écrira «  $f_k$  » – resp. «  $g_k$  » – pour «  $f_k(x)$  » – resp. «  $g_k(x)$  » – afin d'alléger) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall -t+1 \leq k \leq t, k \neq 0, \\ \forall -t \leq k \leq t-1, \end{array} \right. \quad \begin{cases} f_{-t}^t = 0 \\ f_k^t = x(f_{k-1}^t + g_{k-1}^t) \\ f_0^t = 1 + x(f_{-1}^t + g_{-1}^t) \\ g_k^t = x \sum_{i=k+1}^t f_i^t \\ g_t^t = 0 \end{cases} ,$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} -1 & & & & 0 & & & & \\ x & -1 & & & x & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & & x & -1 & & x & 0 & \\ \hline 0 & x & \dots & x & -1 & & & & \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \ddots & & & \\ & & \ddots & x & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -1 & \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_{-t}^t \\ \vdots \\ f_{-1}^t \\ f_0^t \\ f_1^t \\ \vdots \\ f_t^t \\ g_{-t}^t \\ \vdots \\ \vdots \\ g_t^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.3)$$

Précisons ici qu'on a délibérément écrit «  $f_0^t = 1 + x(f_{-1}^t + g_{-1}^t)$  » (au lieu de «  $f_0^t = x(f_{-1}^t + g_{-1}^t)$  », comme on s'y attendait). Cela s'explique par le fait que cette modification facilité légèrement les calculs qui vont suivre. Une fois les expressions de  $f_0^t$  et de  $g_0^t$  trouvées, on prendra soin de retrancher 1 à l'expression de  $f_0^t + g_0^t$  pour obtenir la bonne énumération de  $\mathcal{G}^{[-t,t]}$ .

Pour une valeur de  $t \geq 0$  fixée, la matrice carrée de l'équation précédente, d'ordre  $2(2t+1)$ , sera notée  $\tilde{M}_t$ . On remarque qu'elle est égale à la matrice  $M_{2t}$  qui intervient dans l'équation (3.6). Ainsi, le déterminant  $\tilde{m}_t = \det(\tilde{M}_t)$  vaut  $\det(M_{2t}) = m_{2t}$ . En utilisant la formule (3.8), on en déduit :

$$\tilde{m}_t = \frac{4^t x^{2t+1}}{R} \left( \frac{R - x^2 + x - 1}{(R - x^2 + x + 1)^{2t+1}} - \frac{R + x^2 - x + 1}{(R + x^2 - x - 1)^{2t+1}} \right),$$

avec  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ . On peut désormais utiliser la règle de Cramer pour résoudre l'équation (4.3). Pour tout  $0 \leq k \leq 2t$ , on a ainsi :

$$f_k^t = \frac{\det(\tilde{M}_t[k])}{\tilde{m}_t}, \quad \text{et} \quad g_k^t = \frac{\det(\tilde{M}_t[2t+1+k])}{\tilde{m}_t}, \quad (4.4)$$

où  $\tilde{M}_t[k]$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $(k+1)$ ème colonne de  $M_t$  par le second membre  $[0 \ \dots \ 0 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , le «  $-1$  » étant à la  $(t+1)$ ème position.

À présent, en posant  $\tilde{n}_{t,k} = \det(\tilde{M}_t[k])$  pour tous  $t \geq 0$  et  $0 \leq k \leq 4t+1$ , on trouve les deux relations suivantes :

$$\tilde{n}_{t,0} = m_{t-1} \cdot m_t, \quad \text{et} \quad \tilde{n}_{t,2t+1} = m_{t-1} \cdot n_{t,t+1},$$

où on rappelle qu'on a posé  $n_{t,k} = \det(M_t[k])$ . En utilisant les formules du paragraphe 3.8.2, on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 35.** Pour tout  $t \geq 1$ , la série génératrice de  $(|\mathcal{G}_n^{[-t,t]}|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$f_0^t - 1 + g_0^t = \frac{m_{t-1}}{m_{2t}} \cdot (m_t + n_{t,t+1}) - 1, \quad (4.5)$$

avec

$$m_t = \frac{2^t x^{t+1}}{R} \left( \frac{R - x^2 + x - 1}{(R - x^2 + x + 1)^{t+1}} + (-1)^{t+1} \frac{R + x^2 - x + 1}{(R + x^2 - x - 1)^{t+1}} \right),$$

$$n_{t,t+1} = \frac{2^{t+2} x^{t+3} (-1)^t}{R(x^2 - x - 1)^2 - R^3} \left( \frac{1}{(x^2 - x - 1 + R)^t} - \frac{1}{(x^2 - x - 1 - R)^t} \right),$$

et  $R = \sqrt{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$ .

**Exemple 36.** Pour  $t \in [3]$ , on a les expressions suivantes :

$$f_0^1 - 1 + g_0^1 = \frac{x^2(2+x-x^2)}{x^4-x^3-2x^2+1}, \quad f_0^2 - 1 + g_0^2 = \frac{x^2(x^2-x-1)(2+3x+x^2-x^3)}{x^7-2x^6-3x^5+2x^4+6x^3+3x^2-x-1},$$

$$f_0^3 - 1 + g_0^3 = \frac{x^2(1-x)(1+2x+x^2-x^3)(2+x-4x^2-4x^3+x^4+3x^5-x^6)}{x^{12}-5x^{11}+4x^{10}+10x^9-4x^8-19x^7-4x^6+17x^5+11x^4-5x^3-6x^2+1},$$

et les premiers termes des développements de Taylor correspondants sont (respectivement) :

- $2x^2 + x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 10x^7 + 11x^8 + 21x^9 + 27x^{10} + O(x^{11})$  ;
- $2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 13x^5 + 22x^6 + 48x^7 + 93x^8 + 190x^9 + 375x^{10} + O(x^{11})$  ;
- $2x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 15x^5 + 36x^6 + 75x^7 + 176x^8 + 386x^9 + 869x^{10} + O(x^{11})$ .

Les coefficients du premier développement correspondent à l'entrée [A122514](#) de [69] (le paragraphe ci-après donne une bijection avec une famille d'objets combinatoires comptée par cette entrée), tandis que les autres suites d'entiers de cette liste ne correspondent à aucune entrée de l'encyclopédie.

### Bijection avec un ensemble de compositions

Pour tout  $n \geq 0$ , on note (uniquement dans ce paragraphe)  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des compositions de  $n$  dont les parties ont des parités alternantes, la première partie est impaire, et la dernière partie est paire (ces compositions ont nécessairement au moins deux parties). Par exemple, on a :

$$\mathcal{C}_9 = \{(1, 8), (7, 2), (3, 6), (5, 4), (1, 2, 1, 2, 1, 2)\}.$$

D'après l'entrée [A122514](#) de [69], la série génératrice de cette famille de compositions est la même – à un décalage et quelques termes initiaux près – que celle des chemins de  $\mathcal{G}^{[-1,1]}$ . On va alors donner une bijection entre  $\mathcal{G}^{[-1,1]}$  et  $\mathcal{C}_{\geq 5} = \bigcup_{n \geq 5} \mathcal{C}_n$ .

Ainsi, on définit l'application  $\xi$  sur l'ensemble  $\mathcal{G}^{[-1,1]}$  de la manière suivante. Soit  $n \geq 2$ , et soit  $\alpha \in \mathcal{G}_n^{[-1,1]}$ . On écrit alors  $\alpha = B_1 \dots B_r$ , où chaque bloc  $B_i$  est un facteur de  $\alpha$ , défini par les règles suivantes :

- si  $\alpha$  évite les motifs  $UU$  et  $UD_2$ , alors  $r = 1$  et  $B_1 = \alpha$  ;
- sinon, on place les coupures entre les  $B_i$  et  $B_{i+1}$  au milieu de chaque occurrence de  $UU$  ou de  $UD_2$ .

Par exemple, si  $\alpha = UD_2UUDUD_2UDUDUUD$ , alors on a  $r = 5$ ,  $B_1 = U$ ,  $B_2 = D_2U$ ,  $B_3 = UDU$ ,  $B_4 = D_2UDUDU$ , et  $B_5 = UD$ . Si  $r = 1$ , alors cela signifie que  $n$  est pair, et qu'on a soit  $\alpha = (DU)^{n/2}$ , soit  $\alpha = (UD)^{n/2}$ . Dans le premier cas, on pose

$$\xi \left( (DU)^{n/2} \right) = (1, n + 2),$$

et dans le second cas, on pose

$$\xi \left( (UD)^{n/2} \right) = (n + 1, 2).$$

Sinon, on a  $r \geq 2$ , et on considère alors la composition  $(|B_r|, |B_{r-1}|, \dots, |B_1|)$ , puis on définit l'opération  $\varsigma$  suivante :

$$\varsigma(x_r, \dots, x_1) = \begin{cases} (x_r + 1, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 + 2) & \text{si } x_{r-1} \text{ et } x_1 \text{ sont pairs} \\ (x_r + 1, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1, 2) & \text{si } x_{r-1} \text{ est pair et } x_1 \text{ est impair} \\ (1, x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 + 2) & \text{si } x_{r-1} \text{ est impair et } x_1 \text{ est pair} \\ (1, x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1, 2) & \text{si } x_{r-1} \text{ et } x_1 \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

On pose alors :

$$\xi(\alpha) = \varsigma(|B_r|, \dots, |B_1|).$$

La figure 4.4 illustre un exemple de calcul de  $\xi(\alpha)$ .

**Fait.** L'application  $\xi$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{C}_{\geq 5}$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathcal{G}^{[-1,1]}$ . On note  $\alpha = B_1 \dots B_r$ , où les blocs  $B_i$  sont définis ci-avant. Si  $r = 1$ , alors cela signifie qu'on a soit  $\xi(\alpha) = (1, |\alpha| + 2)$ , soit  $\xi(\alpha) = (|\alpha| + 1, 2)$ . Puisque  $|\alpha|$  doit être pair dans cette situation,  $\xi(\alpha)$  est effectivement une composition dont les parties ont des parités alternantes, la première partie étant impaire, et la dernière partie étant paire. De plus, puisqu'on a  $|\alpha| \geq 2$ , et que la somme des parties de  $\xi(\alpha)$  vaut  $|\alpha| + 3 \geq 5$  dans les deux cas, on a  $\xi(\alpha) \in \mathcal{C}_{\geq 5}$ .

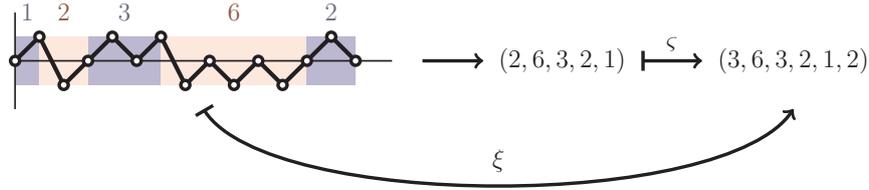


FIGURE 4.4 – L'image par  $\xi$  de  $UD_2UUDUD_2UDUDUUD$  est  $(3, 6, 3, 2, 1, 2)$ .

Supposons à présent qu'on a  $r \geq 2$ . On remarque alors la chose suivante : si l'on translate la représentation graphique de  $\alpha_1 \dots \alpha_{|\alpha|-1}$  d'une unité vers le haut, on obtient un chemin de la forme  $\beta_2 \dots \beta_{n-1}$ , où  $\beta \in \mathcal{T}_n^{[0,2]}$ . De plus, la décomposition en blocs  $B_1, \dots, B_r$  présentée dans la définition de  $\xi$  est la même que celle qui intervient dans la définition de  $\vartheta$  (cf. le paragraphe 3.8.2). On peut donc invoquer les mêmes arguments que dans ledit paragraphe afin de conclure que les tailles des blocs  $|B_1|, \dots, |B_{r-1}|$  du chemin  $\alpha$  ont des parités alternantes. Pour ce qui est de la longueur  $|B_r|$ , on se convainc que c'est forcément un nombre pair : en effet, si le motif qui marque la coupure entre  $B_{r-1}$  et  $B_r$  est  $UU$ , alors  $B_r$  est de la forme  $(UD)^k$  ( $k \geq 1$ ), et si le motif en question est  $UD_2$ , alors  $B_r$  est de la forme  $D_2(UD)^\ell U$  ( $\ell \geq 0$ ). Dans les deux cas,  $|B_r|$  est bien pair. Il faut maintenant montrer que les parties de  $\xi(\alpha) = \zeta(|B_r|, \dots, |B_1|)$  ont également des parités alternantes, que la première est impaire, et que la dernière est paire.

Tout d'abord, si  $|B_{r-1}|$  est pair, alors  $\xi(\alpha)$  sera de la forme  $(|B_r| + 1, |B_{r-1}|, \dots)$ . Puisque  $|B_r|$  est pair, la première partie  $|B_r| + 1$  de  $\xi(\alpha)$  sera impaire, puis  $|B_{r-1}|$  est pair, ce qui montre que le début de  $\xi(\alpha)$  respecte les bonnes contraintes. A contrario, si  $|B_{r-1}|$  est impair, alors  $\xi(\alpha)$  sera de la forme  $(1, |B_r|, |B_{r-1}|, \dots)$ . Puisque  $|B_r|$  est pair, les deux premières parties 1 et  $|B_r|$  de  $\xi(\alpha)$  seront impaire et paire (dans cet ordre), puis  $|B_{r-1}|$  est impair, ce qui montre que le début de  $\xi(\alpha)$  respecte les bonnes contraintes.

Ensuite, on peut utiliser le même genre de raisonnement pour montrer que, quelle que soit la parité de  $|B_1|$ , la définition de  $\zeta$  fait que la fin de  $\xi(\alpha)$  respectera toujours les bonnes contraintes. Enfin, puisque les longueurs  $|B_{r-1}|, \dots, |B_1|$  ont des parités alternantes, le milieu de  $\xi(\alpha)$  respectera lui aussi toujours les bonnes contraintes.

Finalement, puisqu'on a  $|\alpha| \geq 2$ , et puisque l'opération  $\zeta$  rajoute toujours 3 à la somme  $\sum_{1 \leq i \leq r} |B_i|$ ,  $\xi(\alpha)$  est une composition de  $|\alpha| + 3 \geq 5$ . In fine,  $\xi(\alpha)$  est donc bien un élément de  $\mathcal{C}_{\geq 5}$ , ce qui montre l'inclusion  $\xi(\mathcal{G}^{[-1,1]}) \subset \mathcal{C}_{\geq 5}$ .  $\square$

**Théorème 37.** L'application  $\xi : \mathcal{G}^{[-1,1]} \longrightarrow \mathcal{C}_{n \geq 5}$  est bijective. De plus, pour tout  $n \geq 2$ , la restriction  $\xi|_{\mathcal{G}_n^{[-1,1]}}$  est une bijection entre  $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$  et  $\mathcal{C}_{n+3}$ .

*Démonstration.* On va d'abord montrer le second point. Soient alors  $n \geq 2$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathcal{C}_{n+3}$ , et montrons qu'il existe  $\alpha \in \mathcal{G}_n^{[-1,1]}$  vérifiant  $\xi(\alpha) = \beta$ . Puisque  $\beta_1$  est impaire et que  $\beta_r$  est pair, on a nécessairement  $\beta_1 \neq \beta_r$ , et donc  $r \geq 2$ . De plus, puisque les  $\beta_i$  ont des parités alternantes, on en conclut que  $r$  est un nombre pair (sans quoi les parties  $\beta_1$  et  $\beta_r$  devraient avoir la même parité, ce qui n'est pas le cas, par définition de  $\mathcal{C}_{\geq 5}$ ).

On va alors considérer les quatre cas suivants :

- $\beta_1 = 1$ , et  $\beta_r = 2$  ;
- $\beta_1 = 1$ , et  $\beta_r$  est un nombre pair strictement supérieur à 2 ;

- $\beta_1$  est un nombre impair strictement supérieur à 1, et  $\beta_r = 2$  ;
- $\beta_1$  est un nombre impair strictement supérieur à 1, et  $\beta_r$  est un nombre pair strictement supérieur à 2.

On définit alors, selon le cas correspondant, le chemin  $\alpha \in \mathcal{G}_n^{[-1,1]}$  comme suit.

Cas (i) :

$$\alpha = (UD)^{(\beta_{r-1}-1)/2}U \ D_2U(DU)^{(\beta_{r-2}-2)/2} \ \dots \ (UD)^{(\beta_3-1)/2}U \ D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} \ ;$$

Cas (ii) :

$$\alpha = (DU)^{(\beta_r-2)/2} \ (UD)^{(\beta_{r-1}-1)/2}U \ \dots \ (UD)^{(\beta_3-1)/2}U \ D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} \ ;$$

Cas (iii) :

$$\alpha = (UD)^{(\beta_{r-1}-1)/2}U \ D_2U(DU)^{(\beta_{r-2}-2)/2} \ \dots \ D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} \ (UD)^{(\beta_1-1)/2} \ ;$$

Cas (iv) :

$$\alpha = (DU)^{(\beta_r-2)/2} \ (UD)^{(\beta_{r-1}-1)/2}U \ \dots \ D_2U(DU)^{(\beta_2-2)/2} \ (UD)^{(\beta_1-1)/2} \ .$$

On note que ces chemins sont toujours bien définis. En effet, étant donné que  $\beta_1$  est toujours impair, que  $\beta_2$  est toujours pair, etc., que  $\beta_{r-1}$  est toujours impair, et que  $\beta_r$  est toujours pair, les puissances qui interviennent dans les constructions de  $\alpha$  ci-avant sont bien des entiers. On vérifie alors qu'on a bien  $\xi(\alpha) = \beta$  dans chaque situation.

On a finalement montré que l'application  $\xi$  induit une surjection de  $\mathcal{G}_n^{[-1,1]}$  vers  $\mathcal{C}_{n+3}$ , pour tout  $n \geq 2$ . Or, d'après l'entrée [A122514](#) de [69], la série génératrice de  $(|\mathcal{C}_{n+2}|)_{n \geq 3}$  est la même – à un facteur  $x$  près – que celle des chemins de  $\mathcal{G}^{[-1,1]}$  (cf. l'exemple 36). Cela signifie que les cardinaux  $|\mathcal{G}_n^{[-1,1]}|$  et  $|\mathcal{C}_{n+3}|$  sont finis et égaux pour tout  $n \geq 2$ . On en déduit alors finalement que la surjection  $\xi|_{\mathcal{G}_n^{[-1,1]}} : \mathcal{G}_n^{[-1,1]} \longrightarrow \mathcal{C}_{n+3}$  est une bijection, pour tout  $n \geq 2$ .

Enfin, la bijectivité de l'application  $\xi : \mathcal{G}^{[-1,1]} \longrightarrow \mathcal{C}_{\geq 5}$  s'obtient par le fait qu'on a  $\mathcal{G}^{[-1,1]} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{G}_n^{[-1,1]}$  et  $\mathcal{C}_{\geq 5} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{C}_{n+3}$ .  $\square$



# Chapitre 5

## Chemins de Dyck obliques avec trous d'air

Ce chapitre porte sur une autre généralisation des chemins de Dyck avec trous d'air, à savoir : les chemins de Dyck *obliques* avec trous d'air (en s'inspirant de ce qui a été fait sur les chemins de Dyck classiques, par exemple dans [18, 31]). Leur étude est conduite de façon similaire à ce qui est fait dans les chapitres 3 et 4.

Les travaux exposés dans ce chapitre correspondent à l'article [15], qui a fait l'objet d'une publication.

### 5.1 Définition

Un *chemin de Dyck oblique avec trous d'air* (abrégé dans la suite du document en « cDota. ») est un chemin non vide sur le quadrant Nord-Est de  $\mathbb{Z}^2$ , commençant à l'origine, finissant sur l'axe des abscisses, et composé de pas vers le haut  $U = (1, 1)$ , vers le bas  $D_k = (1, -k)$ ,  $k \geq 1$ , et vers la gauche  $L = (-1, -1)$ , de telle sorte que deux pas vers le bas ou deux pas de sens opposés ( $U$  et  $L$ ) ne sont jamais consécutifs. En somme, un cDota. est un cDta. qui dispose d'un nouveau type de pas  $L$ , et qui évite les facteurs  $UL$  et  $LU$ . La figure 5.1 donne un exemple de représentation graphique de cDota.

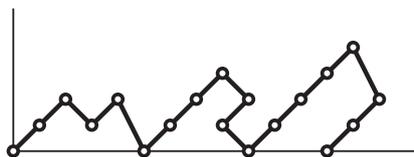


FIGURE 5.1 – Le cDota.  $UUDUD_2UUUDLDUUUUUD_2LL$ .

On appellera *longueur* d'un cDota. son nombre de pas, et on notera  $|\alpha|$  la longueur du cDota.  $\alpha$ . Enfin, on notera  $\mathcal{O}_n$  l'ensemble des cDota. de longueur  $n$ . Par définition, on a  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_1 = \emptyset$ , et on pose  $\mathcal{O} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{O}_n$ .

## 5.2 Énumération

Comme dans les chapitres précédents, on va énumérer les cDota. en passant par l'énumération des cDota. partiels. On note  $\mathcal{O}'_n$  l'ensemble des cDota. partiels de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{O}' = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{O}'_n$ .

Afin d'énumérer les cDota. partiels finissant à une altitude fixée, on réintroduit les notations  $f_k$  et  $g_k$  (pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ) des chapitres précédents, et on introduit une notation  $h_k$  pour les pas vers la gauche  $L = (-1, -1)$ . Ici, donc, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f_k$  (resp.  $g_k, h_k$ ) est la série génératrice des cDota. partiels finissant à altitude  $k$  par un pas  $U$  (resp.  $D_\ell, L$ ). La figure 5.2 donne le graphe d'état des chemins de  $\mathcal{O}'$ .

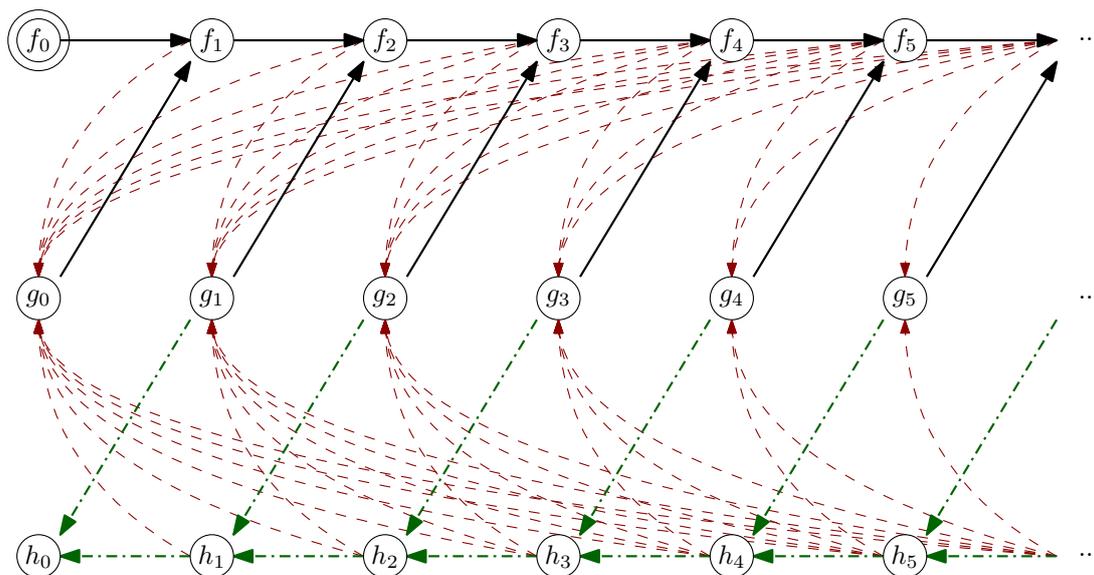


FIGURE 5.2 – Graphe d'état des cDota. partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche.

Ainsi, les fonctions  $f_0, g_0, h_0, f_1, g_1, h_1, \dots$  vérifient le système d'équations suivant (on écrira «  $f_k$  » – resp. «  $g_k$  », «  $h_k$  » – pour «  $f_k(x)$  » – resp. «  $g_k(x)$  », «  $h_k(x)$  » – afin d'alléger) :

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k = x(f_{k-1} + g_{k-1}) \\ \forall k \geq 0, g_k = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i} + h_{k+i}) \\ \forall k \geq 0, h_k = x(g_{k+1} + h_{k+1}) \end{cases} .$$

Une fois de plus, on a préféré écrire «  $f_0 = 1$  » plutôt que «  $f_0 = 0$  », afin que la méthode du noyau puisse s'appliquer dans les calculs qui suivent. On prendra soin de retrancher 1 aux développements de Taylor qui font intervenir la quantité  $f_0(x)$ .

À présent, on pose  $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k u^k$ ,  $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k u^k$ , et  $H(u) = \sum_{k \geq 0} h_k u^k$ . En réinjectant les équations vérifiées par les  $f_k/g_k/h_k$ , on trouve :

$$\begin{cases} F(u) = 1 + xu(F(u) + G(u)) \\ G(u) = \frac{x}{1-u}(F(1) - F(u) + H(1) - H(u)) \\ H(u) = \frac{x}{u}(H(u) - H(0) + G(u) - G(0)) \end{cases} .$$

Après résolution, on obtient :

$$F(u) = \frac{u x^2 (u-x)(F(1)+H(1)) + u x^3 (G(0)+H(0)) - u^2 + (x+1)u + x^2 - x}{u^3 x - 2u x^3 - u^2 x + x^2 u - u^2 + x u + x^2 + u - x},$$

$$G(u) = -\frac{x((xu-1)(u-x)(F(1)+H(1)) + (x^2 u - x)(G(0)+H(0)) + u - x)}{u^3 x - 2u x^3 - u^2 x + x^2 u - u^2 + x u + x^2 + u - x},$$

$$H(u) = -\frac{((x^2 u + (u^2 - u)x - u + 1)(G(0)+H(0)) + x(xu-1)(F(1)+H(1)) + x)x}{u^3 x - 2u x^3 - u^2 x + x^2 u - u^2 + x u + x^2 + u - x}.$$

On note que les trois fractions obtenues ont le même dénominateur, qui se réécrit comme  $x(u-s_1)(u-s_2)(u-s_3)$ , où  $s_1$ ,  $s_2$ , et  $s_3$  sont les racines (en  $u$ ) de  $u^3 x - 2u x^3 - u^2 x + x^2 u - u^2 + x u + x^2 + u - x$ . Deux de ces trois racines possèdent un développement de Taylor en  $x=0$  (sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de  $s_2$  et de  $s_3$ ). Alors, d'après la méthode du noyau,  $u-s_2$  et  $u-s_3$  sont les « mauvais » facteurs, qui doivent être simplifiés à la fois dans le numérateur et dans le dénominateur. Ce faisant, il reste au numérateur le coefficient en  $u^2$ , et le dénominateur devient  $x(u-s_1)$ . On en déduit alors :

$$\begin{cases} F(u) &= \frac{1-x^2(F(1)+H(1))}{x(s_1-u)} \\ G(u) &= \frac{x(F(1)+H(1))}{x(s_1-u)} \\ H(u) &= \frac{x(G(0)+H(0))}{s_1-u} \end{cases},$$

où la racine  $s_1$  vaut

$$\frac{A}{6x} + \frac{4x^4 - 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{xA} + \frac{x+1}{3x},$$

avec

$$A = (72x^5 - 72x^4 + 44x^3 + 12Bx - 48x^2 - 12x + 8)^{\frac{1}{3}},$$

et

$$B = \sqrt{-96x^{10} + 144x^9 + 60x^8 - 108x^7 - 24x^6 - 48x^5 + 81x^4 - 18x^2 + 12x - 3}.$$

En remplaçant  $u$  par 0 ou 1 dans le système d'équations précédent, on trouve :

$$\begin{cases} G(0) &= \frac{1-xs_1}{xs_1} \\ H(0) &= \frac{xs_1-1}{(x-s_1)s_1} \\ F(1) &= \frac{(x-1)(-s_1^2 x + 2s_1 x^2 + x^2 + s_1 - x)}{x(s_1-1)(x-s_1)} \\ H(1) &= \frac{(-2s_1-1)x^4 + (s_1^2 + 2s_1 + 2)x^3 + (-2s_1^2 - 1)x^2 + (s_1^3 - s_1^2 + 2s_1 - 1)x - s_1^2 + s_1}{x^2(s_1-1)(x-s_1)} \end{cases}.$$

Enfin, en réinjectant ces expressions dans l'avant-dernier système d'équations, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 38.** On a :

$$F(u) = \frac{s_1}{s_1 - u}, \quad G(u) = \frac{1 - s_1 x}{x(s_1 - u)}, \quad \text{et} \quad H(u) = \frac{1 - s_1 x}{(s_1 - u)(s_1 - x)},$$

d'où :

$$F(u) + G(u) + H(u) = \frac{s_1(1-x^2)}{x(s_1-x)(s_1-u)},$$

avec

$$s_1 = \frac{A}{6x} + \frac{4x^4 - 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{xA} + \frac{x+1}{3x},$$

puis

$$A = (72x^5 - 72x^4 + 44x^3 + 12Bx - 48x^2 - 12x + 8)^{\frac{1}{3}},$$

et

$$B = \sqrt{-96x^{10} + 144x^9 + 60x^8 - 108x^7 - 24x^6 - 48x^5 + 81x^4 - 18x^2 + 12x - 3}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor de  $F(u) - 1 + G(u) + H(u)$  sont :

$$\begin{aligned} & ux + (u^2 + 1)x^2 + (u^3 + 2u + 1)x^3 + (u^4 + 3u^2 + 2u + 3)x^4 \\ & + (u^5 + 4u^3 + 3u^2 + 6u + 5)x^5 + (u^6 + 5u^4 + 4u^3 + 10u^2 + 11u + 13)x^6 \\ & + (u^7 + 6u^5 + 5u^4 + 15u^3 + 19u^2 + 28u + 26)x^7 + O(x^8). \end{aligned}$$

Le triangle de coefficients correspondant n'apparaît pas dans [69].

Maintenant, on utilise l'identité

$$\frac{1}{s_1 - u} = \frac{1}{s_1} \sum_{k \geq 0} s_1^{-k} \cdot u^k$$

afin d'extraire le coefficient  $[u^k](F(u) + G(u) + H(u))$ , ce qui donne le résultat suivant.

**Corollaire 39.** Pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$[u^k](F(u) + G(u) + H(u)) = \frac{1-x^2}{x(s_1-x)} s_1^{-k}.$$

Enfin, en remplaçant  $u$  par 0 puis par 1, on obtient les résultats suivants.

**Proposition 40.** La série génératrice de  $(|\mathcal{O}_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(0) - 1 + G(0) + H(0) = \frac{xs_1 - 1}{x(x - s_1)},$$

où l'expression de  $s_1$  est donnée dans la proposition 38. Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x^2 + x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 13x^6 + 26x^7 + 64x^8 + 143x^9 + O(x^{10}).$$

Les coefficients de ce développement n'apparaissent pas dans [69].

Un équivalent asymptotique approché du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$0.5292 \cdot 2.7309^n \cdot n^{-3/2}.$$

**Proposition 41.** La série génératrice de  $(|\mathcal{O}'_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(1) - 1 + G(1) + H(1) = \frac{s_1 + xs_1(1 - s_1) - x^2}{x(s_1 - x)(s_1 - 1)},$$

où l'expression de  $s_1$  est donnée dans la proposition 38. Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x + 2x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 19x^5 + 44x^6 + 100x^7 + 236x^8 + 558x^9 + O(x^{10}).$$

Les coefficients de ce développement n'apparaissent pas dans [69].

Un équivalent asymptotique approché du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$2.4909 \cdot 2.7309^n \cdot n^{-3/2}.$$

### 5.2.1 Chemins sans vallée

Tout d'abord, on définit les cDota. *sans vallée* comme la famille des cDota. qui évitent l'ensemble de facteurs  $\{D_k U; k \geq 1\}$ . On notera par la suite  $\mathcal{V}_n$  l'ensemble des cDota. sans vallée de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{V} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{V}_n$ . De plus, on note  $\mathcal{V}'_n$  l'ensemble des préfixes de  $\mathcal{V}$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{V}' = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{V}'_n$ .

Afin d'énumérer les cDota. sans vallée, on emploie ici la même méthode que pour les cDota., détaillée au début de cette section. Afin de demeurer concis, on va simplement donner le graphe d'état des chemins de  $\mathcal{V}'$ , ainsi que le système d'équations correspondant (en adaptant les notations  $f_k/g_k/h_k$  à l'ensemble  $\mathcal{V}'$ ), avant d'énoncer des résultats énumératifs. Ainsi, la figure 5.3 donne le graphe d'état des chemins de  $\mathcal{V}'$ .

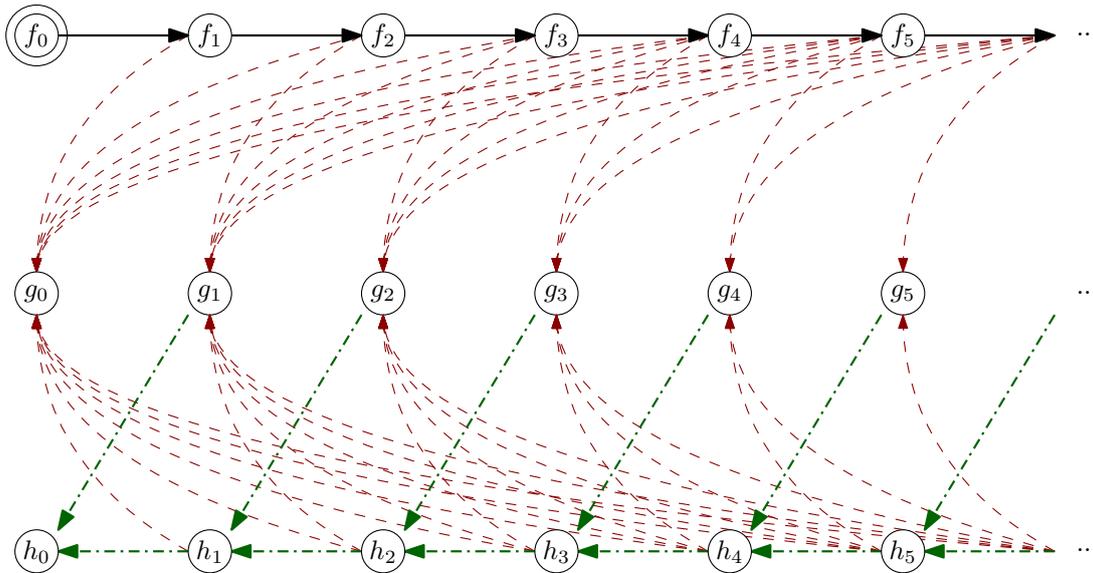


FIGURE 5.3 – Graphe d'état des cDota. sans vallée partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche.

Le système d'équations correspondant est :

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k = x f_{k-1} \\ \forall k \geq 0, g_k = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i} + h_{k+i}) \\ \forall k \geq 0, h_k = x (g_{k+1} + h_{k+1}) \end{cases} .$$

À présent, en posant  $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k u^k$ ,  $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k u^k$ , et  $H(u) = \sum_{k \geq 0} h_k u^k$ , on trouve les résultats suivants.

**Proposition 42.** On a :

$$F(u) = \frac{1}{1-xu}, \quad G(u) = \frac{x^2 - x^4}{(1-xu)(1-x-x^2+x^3-x^4)},$$

$$H(u) = \frac{x^4}{(1-xu)(1-x-x^2+x^3-x^4)},$$

d'où :

$$F(u) + G(u) + H(u) = \frac{1-x+x^3-x^4}{(1-xu)(1-x-x^2+x^3-x^4)}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor de  $F(u) - 1 + G(u) + H(u)$  sont :

$$\begin{aligned} & ux + (u^2 + 1)x^2 + (u^3 + u + 1)x^3 + (u^4 + u^2 + u + 2)x^4 \\ & + (u^5 + u^3 + u^2 + 2u + 2)x^5 + (u^6 + u^4 + u^3 + 2u^2 + 2u + 4)x^6 \\ & + (u^7 + u^5 + u^4 + 2u^3 + 2u^2 + 4u + 5)x^7 + O(x^8). \end{aligned}$$

Le triangle de coefficients correspondant n'apparaît pas dans [69].

Maintenant, on utilise l'identité

$$\frac{1}{1-xu} = \sum_{k \geq 0} x^k \cdot u^k$$

afin d'extraire le coefficient  $[u^k](F(u) + G(u) + H(u))$ , ce qui donne le résultat suivant.

**Corollaire 43.** Pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$[u^k](F(u) + G(u) + H(u)) = \frac{1-x+x^3-x^4}{1-x-x^2+x^3-x^4} x^k.$$

Enfin, en remplaçant  $u$  par 0 puis par 1, on obtient les résultats suivants.

**Proposition 44.** La série génératrice de  $(|\mathcal{V}_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(0) - 1 + G(0) + H(0) = \frac{x^2}{1-x-x^2+x^3-x^4}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 9x^8 + 12x^9 + O(x^{10}),$$

et les coefficients  $c_n$  coïncident avec l'entrée [A124280](#) de [69] (l'encyclopédie ne donne pas d'autre interprétation combinatoire pour cette entrée), et ont pour formule :

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-2k-2} \binom{j}{n-2k-j-2} \binom{k}{n-2k-j-2}.$$

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{-a^4 + a^3 - a + 1}{4a^4 - 3a^3 + 2a^2 + a} \cdot (a^3 - a^2 + a + 1)^n \approx 0.3051 \cdot 1.5129^n,$$

où  $a \approx 0.6609925319$  est la racine de plus petit module de  $z^4 - z^3 + z^2 + z - 1$ .

**Proposition 45.** La série génératrice de  $(|\mathcal{V}'_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(1) - 1 + G(1) + H(1) = \frac{x + x^2 + x^4}{1 - x - x^2 + x^3 - x^4}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 16x^7 + 25x^8 + 37x^9 + O(x^{10}),$$

et les coefficients coïncident avec l'entrée [A130137](#) de [69] (la sous-section 5.3.1 donne une bijection avec une famille d'objets combinatoires comptée par cette entrée).

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{a^3 + 1}{4a^4 - 3a^3 + 2a^2 + a} \cdot (a^3 - a^2 + a + 1)^n \approx 0.9000 \cdot 1.5129^n,$$

où  $a \approx 0.6609925319$  est la racine de plus petit module de  $z^4 - z^3 + z^2 + z - 1$ .

## 5.2.2 Chemins sans vallée en zigzag

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux cDota. sans vallée *en zigzag*, c.-à-d. qui évitent le facteur  $LL$ . Ce sont donc les cDota. qui évitent l'ensemble de facteurs

$$\{LL\} \cup \{D_k U; k \geq 1\}.$$

On notera par la suite  $\mathcal{Z}_n$  l'ensemble des cDota. sans vallée en zigzag de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{Z} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{Z}_n$ . De plus, on note  $\mathcal{Z}'_n$  l'ensemble des préfixes de  $\mathcal{Z}$  de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{Z}' = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{Z}'_n$ .

Afin d'énumérer les cDota. sans vallée en zigzag, on emploie ici la même méthode que pour les cDota., détaillée au début de cette section. Afin de demeurer concis, on va simplement donner le graphe d'état des chemins de  $\mathcal{Z}'$ , ainsi que le système d'équations correspondant (en adaptant les notations  $f_k/g_k/h_k$  à l'ensemble  $\mathcal{Z}'$ ), avant d'énoncer des résultats énumératifs. Ainsi, la figure 5.4 donne le graphe d'état des chemins de  $\mathcal{Z}'$ .

Le système d'équations correspondant est :

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ \forall k \geq 1, f_k = x f_{k-1} \\ \forall k \geq 0, g_k = x \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k+i} + h_{k+i}) \\ \forall k \geq 0, h_k = x g_{k+1} \end{cases}.$$

À présent, en posant  $F(u) = \sum_{k \geq 0} f_k u^k$ ,  $G(u) = \sum_{k \geq 0} g_k u^k$ , et  $H(u) = \sum_{k \geq 0} h_k u^k$ , on trouve les résultats suivants.

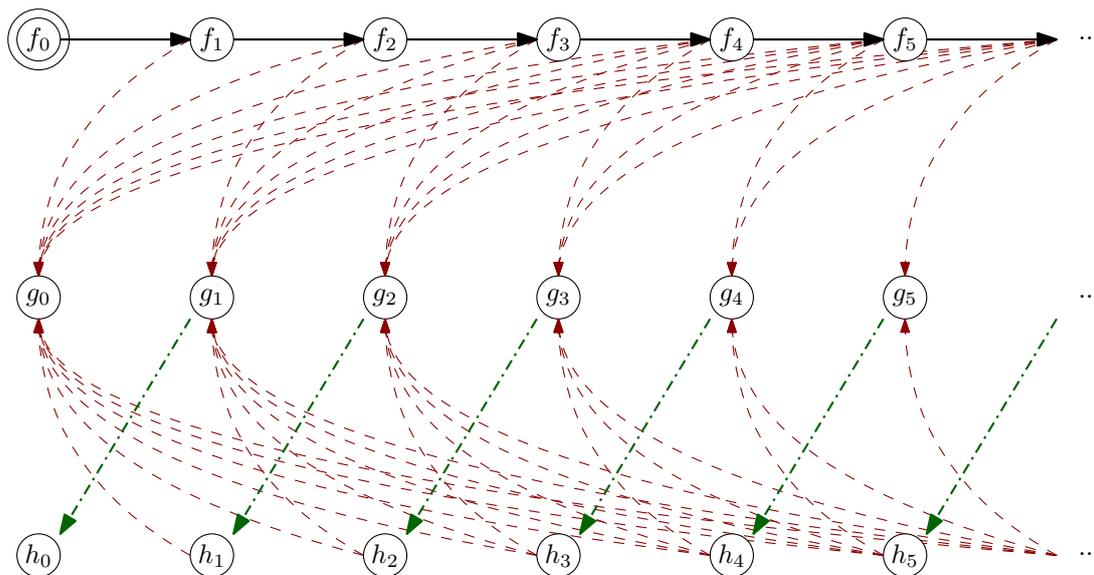


FIGURE 5.4 – Graphe d'état des cDota. sans vallée en zigzag partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche.

**Proposition 46.** On a :

$$F(u) = \frac{1}{1-xu}, \quad G(u) = \frac{x^2}{(1-xu)(1-x-x^4)},$$

$$H(u) = \frac{x^4}{(1-xu)(1-x-x^4)},$$

d'où :

$$F(u) + G(u) + H(u) = \frac{1-x+x^2}{(1-xu)(1-x-x^4)}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor de  $F(u) - 1 + G(u) + H(u)$  sont :

$$ux + (u^2 + 1)x^2 + (u^3 + u + 1)x^3 + (u^4 + u^2 + u + 2)x^4$$

$$+ (u^5 + u^3 + u^2 + 2u + 2)x^5 + (u^6 + u^4 + u^3 + 2u^2 + 2u + 3)x^6$$

$$+ (u^7 + u^5 + u^4 + 2u^3 + 2u^2 + 3u + 4)x^7 + O(x^8).$$

Le triangle de coefficients obtenu correspond à l'entrée [A289944](#) de [69] (elle énumère par exemple la liste des longueurs des côtés des triangles équilatéraux qui pavent un polygone convexe à  $n$  côtés particulier, et qui respectent certaines contraintes précises).

Maintenant, on utilise l'identité

$$\frac{1}{1-xu} = \sum_{k \geq 0} x^k \cdot u^k$$

afin d'extraire le coefficient  $[u^k](F(u) + G(u) + H(u))$ , ce qui donne le résultat suivant.

**Corollaire 47.** Pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$[u^k](F(u) + G(u) + H(u)) = \frac{1-x+x^2}{1-x-x^4}x^k.$$

Enfin, en remplaçant  $u$  par 0 puis par 1, on obtient les résultats suivants.

**Proposition 48.** La série génératrice de  $(|\mathcal{Z}_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(0) - 1 + G(0) + H(0) = \frac{x^2 + x^4}{1 - x - x^4}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 6x^8 + 8x^9 + O(x^{10}),$$

et les coefficients  $c_n$  coïncident avec l'entrée [A103632](#) de [69] (la sous-section 5.3.2 donne une bijection avec une famille d'objets combinatoires comptée par cette entrée), et ont pour formule :

$$c_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{2n-3k-1}{2} \rfloor}{n-2k}.$$

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{a^2 - a + 1}{4a^4 + a} \cdot ((a + 1)(a^2 - a + 1))^n \approx 0.4382 \cdot 1.3803^n,$$

où  $a \approx 0.7244919590$  est la racine de plus petit module de  $z^4 + z - 1$ .

**Proposition 49.** La série génératrice de  $(|\mathcal{Z}'_n|)_{n \geq 2}$  est donnée par la formule suivante :

$$F(1) - 1 + G(1) + H(1) = \frac{x + x^4 - x^5}{(1-x)(1-x-x^4)}.$$

Les premiers termes du développement de Taylor correspondant sont :

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 10x^6 + 14x^7 + 20x^8 + 28x^9 + O(x^{10}).$$

Les coefficients de ce développement n'apparaissent pas dans [69].

Un équivalent asymptotique du  $n^{\text{ème}}$  coefficient est :

$$\frac{a^2 - a + 1}{a(4a^3 + 1)(1 - a)} \cdot ((a + 1)(a^2 - a + 1))^n \approx 1.5905 \cdot 1.3803^n,$$

où  $a \approx 0.7244919590$  est la racine de plus petit module de  $z^4 + z - 1$ .

## 5.3 Bijections avec d'autres objets combinatoires

Dans cette section, on exhibe deux bijections. La première porte sur les cDota. sans vallée partiels et une famille de mots binaires, tandis que la seconde porte sur les cDota. sans vallée en zigzag et une famille de compositions.

### 5.3.1 Une famille de mots binaires

On considère dans cette sous-section la famille des mots binaires (sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ ) qui évitent les deux facteurs 00 et 0110. On notera par la suite  $\mathcal{B}_n^{(00,0110)}$  l'ensemble de tels mots binaires de longueur  $n$ , et on pose  $\mathcal{B}^{(00,0110)} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n^{(00,0110)}$ .

À présent, on définit récursivement l'application  $\chi$  suivante, sur l'ensemble  $\mathcal{V}'$  des cDota. sans vallée partiels :

$$\chi : \begin{array}{l} \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{B}^{(00,0110)} \\ U \longmapsto \varepsilon \\ U^k D_k \longmapsto 1^{k-1} 0 \\ U\alpha \longmapsto \chi(\alpha) 1 \\ U\beta L \longmapsto \chi(\beta) 10 \\ U^k \gamma D_k \longmapsto \overline{\chi(\gamma)} 1^k 0 \end{array} ,$$

pour tout  $k \geq 1$ , tout  $\alpha \in \mathcal{V}'$ , tout  $\beta \in \mathcal{V}$ , tout  $\gamma \in \mathcal{V}$  finissant par  $L$ , et où  $\overline{\bullet}$  est un opérateur agissant sur les mots binaires dont la dernière lettre est 0, défini par :

$$\overline{m_1 m_2 \dots m_{n-1} 0} = m_1 m_2 \dots m_{n-1} 1.$$

Par exemple, on a :

$$\chi(U^4 D L D_2) = \overline{\chi(U^2 D L)} 110 = \overline{\chi(U D)} 10110 = \overline{010} 110 = 011110.$$

**Fait.** L'application  $\chi$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{B}^{(00,0110)}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, il est clair que l'image de tout élément de  $\mathcal{V}'$  par  $\chi$  est un mot binaire sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Maintenant, fixons  $\alpha \in \mathcal{V}'$ , et vérifions que  $\chi(\alpha)$  évite à la fois 00 et 0110.

Si, par exemple,  $\alpha$  est de la forme  $U\beta L$ , avec  $\beta \in \mathcal{V}$ , alors  $\chi(\alpha) = \chi(\beta) 10$  évite 00 et 0110 si et seulement si  $\chi(\beta)$  les évite également et ne finit pas par 01. Or, on se convainc que l'image de tout cDota.  $\beta \in \mathcal{V}$  par  $\chi$  finit par 0 (puisque tout chemin  $U\gamma$  avec  $\gamma \in \mathcal{V}'$ , dont l'image finit par 1, est forcément élément de  $\mathcal{V}' \setminus \mathcal{V}$ ). Ainsi,  $\chi(\beta)$  ne saurait finir par 01 et ainsi créer une nouvelle occurrence du motif interdit 0110. Le caractère récursif de  $\chi$  permet ensuite de se convaincre que  $\chi(\beta)$  lui-même ne contient ni 00, ni 0110, le cas de base  $\chi(U^k D_k)$  étant égal à  $1^{k-1} 0$ , qui ne contient pas les motifs 00 et 0110.

Si  $\alpha$  est d'une autre forme, des raisonnements analogues permettent d'affirmer alors que  $\chi(\alpha)$  est bien un élément de  $\mathcal{B}^{(00,0110)}$ .  $\square$

**Théorème 50.** L'application  $\chi : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{B}^{(00,0110)}$  est bijective. De plus, pour tout  $n \geq 1$ , la restriction  $\chi|_{\mathcal{V}'_n}$  est une bijection entre  $\mathcal{V}'_n$  et  $\mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}$ .

*Démonstration.* On va d'abord montrer le second point. Si  $n \in [2]$ , on vérifie de façon immédiate que  $\chi|_{\mathcal{V}'_n}$  est injective. Soit alors  $n \geq 3$ , supposons que  $\chi|_{\mathcal{V}'_k}$  est injective pour tout  $k \in [n-1]$ , et montrons que l'application  $\chi|_{\mathcal{V}'_n}$  est injective. Soient donc  $\alpha, \beta \in \mathcal{V}'_n$  tels que  $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$ , et montrons qu'on a alors  $\alpha = \beta$ .

Si  $\chi(\alpha)$  est de la forme  $1^k 0$ , alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous les deux égaux à  $U^{k+1} D_{k+1}$ . Dans le cas contraire, si par exemple  $\alpha$  était de la forme  $U A L$ , avec  $A \in \mathcal{V}$ , alors on aurait :

$$1^k 0 = \chi(\alpha) = \chi(U A L) = \chi(A) 10,$$

dont on déduirait  $\chi(A) = 1^{k-1}$ , puis  $A = U^k$ , ce qui contredirait le fait que  $A$  est un élément de  $\mathcal{V}$ . Avec un raisonnement similaire, on exclut la possibilité que  $\alpha$  soit de la forme  $U^\ell AD_\ell$ , avec  $\ell \geq 1$  et  $A \in \mathcal{V}$ . Bien entendu,  $\alpha$  ne saurait être de la forme  $UA$ , avec  $A \in \mathcal{V}'$ , sans quoi  $\chi(\alpha)$  ne finirait pas par 0, d'après la définition de  $\chi$ . On a donc bien  $\alpha = U^{k+1}D_{k+1}$ , et les mots binaires  $\chi(\alpha)$  et  $\chi(\beta)$  étant égaux, les mêmes arguments donnent également  $\beta = U^{k+1}D_{k+1}$ , d'où  $\alpha = \beta$ .

Si maintenant  $\chi(\alpha)$  n'est pas de la forme  $1^k0$ , alors on a trois cas à examiner, selon les lettres finales de  $\chi(\alpha)$  :

- (i)  $\chi(\alpha)$  finit par 1 ;
- (ii)  $\chi(\alpha)$  finit par 010 ;
- (iii)  $\chi(\alpha)$  finit par 110.

En effet, puisque  $\chi$  est à valeurs dans  $\mathcal{B}^{(00,0110)}$  (cf. le fait ci-avant),  $\chi(\alpha)$  ne peut finir par 00, donc les trois cas précédents recouvrent bien toutes les possibilités. Supposons par exemple qu'on est dans le cas (iii), c.-à-d. que  $\chi(\alpha)$  est de la forme  $U^k AD_k$  et que  $\chi(\beta)$  est de la forme  $U^\ell BD_\ell$ , avec  $k, \ell \geq 1$ , et  $A, B \in \mathcal{V}$  finissent par  $L$  (on rappelle que l'image par  $\chi$  de tout élément de  $\mathcal{V}$  finit par 0, et celle de tout élément de  $\mathcal{V}' \setminus \mathcal{V}$  finit par 1, donc  $\alpha$  ne peut en fait pas être de la forme  $UCL$ , avec  $C \in \mathcal{V}$ ). Montrons alors qu'on a  $k = \ell$  et  $A = B$ .

D'après la définition de  $\chi$ , on a  $\chi(\alpha) = \overline{\chi(A)}1^k0$ , et  $\chi(\beta) = \overline{\chi(B)}1^\ell0$ . Supposons qu'on a  $k \neq \ell$ , et, sans perte de généralité, supposons qu'on a  $k > \ell$ . Alors l'égalité  $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$  implique  $\overline{\chi(A)}1^{k-\ell} = \overline{\chi(B)}$ . Puisque  $\chi(A)$  évite le motif interdit 00 et finit par 0 ( $A$  étant un élément de  $\mathcal{V}$ ), il finit par 10, d'où on déduit que  $\overline{\chi(B)}$  finit par 111 ( $k - \ell$  étant supérieur ou égal à 1). Maintenant, on note que  $B$  ne peut pas être de la forme  $UXL$ , avec  $X \in \mathcal{V}$ , car sinon  $\chi(B)$  finirait par 010, et donc  $\overline{\chi(B)}$  ne finirait pas par 111 ; cela contredit le fait que  $B$  est un élément de  $\mathcal{V}$  finissant par  $L$ . Ainsi, on a en fait  $k = \ell$ , et donc l'égalité

$$\overline{\chi(A)}1^k0 = \chi(\alpha) = \chi(\beta) = \overline{\chi(B)}1^\ell0$$

entraîne  $\overline{\chi(A)} = \overline{\chi(B)}$ . De plus, puisque  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\mathcal{V}$ , leur image par  $\chi$  finit par 0, on déduit qu'on a  $\chi(A) = \chi(B)$ . Enfin, comme  $|A| = |B| \in [n-1]$ , l'hypothèse de récurrence assure qu'on a alors  $A = B$  ; immédiatement, on a alors  $\alpha = \beta$ .

Les cas (i) et (ii) se traitent d'une manière analogue, et on montre ainsi que  $\chi|_{\mathcal{V}'_n}$  est injective. De plus, puisqu'on a  $\chi(\mathcal{V}') \subset \mathcal{B}^{(00,0110)}$  et  $|\chi(\alpha)| = |\alpha| - 1$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{V}'$ , on en déduit que l'image de  $\chi|_{\mathcal{V}'_n}$  est (incluse dans)  $\mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}$ . Ensuite, d'après l'entrée [A130137](#) de [69], la série génératrice de  $(|\mathcal{B}_n^{(00,0110)}|)_{n \geq 0}$  est – à un facteur  $x$  près – égale à celle des chemins de  $\mathcal{V}'$  (cf. la proposition 45). Cela signifie que les cardinaux  $|\mathcal{V}'_n|$  et  $|\mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}|$  sont finis et égaux pour tout  $n \geq 1$ . On en déduit alors finalement que l'injection  $\chi|_{\mathcal{V}'_n} : \mathcal{V}'_n \longrightarrow \mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}$  est une bijection, pour tout  $n \geq 1$ .

Enfin, la bijectivité de l'application  $\chi : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{B}^{(00,0110)}$  s'obtient par le fait qu'on a  $\mathcal{V}' = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{V}'_n$  et  $\mathcal{B}^{(00,0110)} = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}$ .  $\square$

À titre illustratif, le tableau 5.1 donne les valeurs de  $\chi(\alpha)$ , lorsque  $\alpha$  est un chemin de petite taille.

$n$	$\alpha \in \mathcal{V}'_n$	$\chi(\alpha) \in \mathcal{B}_{n-1}^{(00,0110)}$
1	$U$	$\varepsilon$
2	$UD$	0
	$UU$	1
3	$UUD$	01
	$UUD_2$	10
	$UUU$	11
4	$UUUDL$	010
	$UUUD$	011
	$UUUD_2$	101
	$UUUD_3$	110
	$UUUU$	111

 TABLEAU 5.1 – Premières valeurs de  $\chi$ .

### 5.3.2 Une famille de compositions

On considère dans cette sous-section la famille de compositions suivantes : pour tout  $n \geq 0$ , on note (uniquement dans cette sous-section)  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des compositions de  $n$  palindromiques (c.-à-d. que tout élément  $c = (c_1, \dots, c_k)$  de  $\mathcal{C}_n$  vérifie  $c_i = c_{k+1-i}$  pour tout  $i \in [k]$ ), dont les parties sont dans l'ensemble

$$\{2\} \cup \{2\ell + 1; \ell \in \mathbb{N}\} = \{2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}.$$

On note alors  $\varepsilon$  la composition vide (seul élément de  $\mathcal{C}_0$ ), et on pose  $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}_n$ .

À présent, on définit récursivement l'application  $\omega$  suivante, sur l'ensemble  $\mathcal{Z}$  des cDota. sans vallée en zigzag :

$$\omega : \begin{array}{l} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{C} \\ UD \longmapsto \varepsilon \\ U^2D_2 \longmapsto (1) \\ U^2DL \longmapsto (2) \\ U^3D_2L \longmapsto (3) \\ U^{a+2}D_k s \longmapsto (1, \omega(U^a D_{k-2} s), 1) \\ U^{a+2}DLt \longmapsto (2, \omega(U^a t), 2) \\ U^{b+2}D_2LD_\ell s \longmapsto {}_{+2}\omega(U^b D_{\ell+1} s)_{+2} \end{array},$$

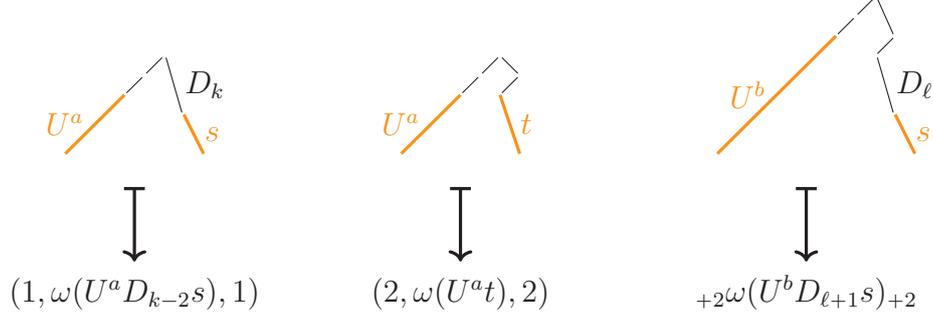
pour tout  $a \geq 1$ , tout  $b \geq 2$ , tout  $k \geq 3$ , tout  $\ell \geq 1$ , tout suffixe (éventuellement vide) de cDota. sans vallée en zigzag  $s$ , tout suffixe non vide de cDota. sans vallée en zigzag  $t$ , et où  ${}_{+2}\bullet_{+2}$  est un opérateur agissant sur les compositions, défini par :

$${}_{+2}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)_{+2} = ((x_1 + 2), x_2, \dots, x_{n-1}, (x_n + 2)), \text{ et par } {}_{+2}(x)_{+2} = (x + 4).$$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned} \omega(U^7 D_2 L D_2 L D) &= {}_{+2}\omega(U^5 D_3 L D)_{+2} = {}_{+2}(1, \omega(U^3 D L D), 1)_{+2} \\ &= {}_{+2}(1, 2, \omega(U D), 2, 1)_{+2} = (3, 2, 2, 3). \end{aligned}$$

La figure 5.5 illustre les cas non triviaux dans la définition de  $\omega$ .


 FIGURE 5.5 – Les trois cas non triviaux dans la définition de l'application  $\omega$ .

**Fait.** L'application  $\omega$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, il est clair que l'image que tout élément de  $\mathcal{Z}$  par  $\omega$  est un palindrome. Maintenant, fixons  $\alpha \in \mathcal{Z}$ , et vérifions que les parties de  $\omega(\alpha)$  sont dans l'ensemble  $\{2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ .

Si  $\alpha$  est de la forme  $U^{a+2}D_k s$  ou  $U^{a+2}DLt$  (avec  $a \geq 1$ ,  $k \geq 3$ ,  $s$  un suffixe éventuellement vide de  $\mathcal{Z}$ , et  $t$  un suffixe non vide de  $\mathcal{Z}$ ), alors l'image  $\chi(\alpha)$  ne crée pas de nouvelle partie qui ne soit pas dans l'ensemble  $\{2, 1, 3, 5, 7, 9\}$  (en effet, on rajoute alors aux extrêmes soit un 1, soit un 2).

Si maintenant  $\alpha$  est de la forme  $U^{b+2}D_2LD_\ell s$  (avec  $b \geq 2$ ,  $\ell \geq 1$ , et  $s$  un suffixe éventuellement vide de  $\mathcal{Z}$ ), alors on a  $\chi(\alpha) = +2\omega(U^b D_{\ell+1} s)_{+2}$ . Or, le chemin  $U^b D_{\ell+1} s$  ne saurait être de la forme  $U^{a+2}D_1Lt$  (avec  $a \geq 1$  et  $t$  un suffixe non vide de  $\mathcal{Z}$ ), puisqu'on a  $\ell + 1 > 1$ . Ainsi, les parties extrêmes (c.-à-d. la première et la dernière) de l'image  $\omega(U^b D_{\ell+1} s)$  ne sauraient être égales à 2; elles sont donc soit égales à 1, soit égales à  $x + 2$ , où  $x$  correspond aux parties extrêmes de  $\omega(U^{b-2} D_{\ell+2} s)$  (qui à son tour ne peut être de la forme  $U^{a+2}D_1Lt$ , puisqu'on a  $\ell + 2 > 1$ , et ainsi de suite). Dans tous les cas, les parties extrêmes de  $\omega(\alpha)$  sont un nombre impair, et sont donc dans l'ensemble  $\{2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ .

Le caractère récursif de  $\omega$  permet alors de se convaincre que  $\chi(\alpha)$  est bien un élément de  $\mathcal{C}$ , les quatre cas de base ne possédant pas de partie qui ne soit pas dans l'ensemble  $\{2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ .  $\square$

**Théorème 51.** L'application  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}$  est bijective. De plus, pour tout  $n \geq 2$ , la restriction  $\omega|_{\mathcal{Z}_n}$  est une bijection entre  $\mathcal{Z}_n$  et  $\mathcal{C}_{n-2}$ .

*Démonstration.* On va d'abord montrer le second point. Si  $n \in \{2, 3\}$ , on vérifie de façon immédiate que  $\omega|_{\mathcal{Z}_n}$  est injective. Soit alors  $n \geq 4$ , supposons que  $\omega|_{\mathcal{Z}_k}$  est injective pour tout  $k \in [n-1]$ , et montrons que l'application  $\omega|_{\mathcal{Z}_n}$  est injective. Soient donc  $\alpha, \beta \in \mathcal{Z}_n$  tels que  $\omega(\alpha) = \omega(\beta)$ , et montrons qu'on a alors  $\alpha = \beta$ .

Tout d'abord, si  $\omega(\alpha) = (2)$  (resp.  $\omega(\alpha) = (3)$ ), alors on se convainc qu'on a  $\alpha = U^2DL = \beta$  (resp.  $\alpha = U^3D_2L = \beta$ ). Ensuite, dans le cas général où  $\omega(\alpha)$  a au moins deux parties, d'après la définition de  $\omega$ ,  $\omega(\alpha)$  peut être de trois formes différentes (la première partie de  $\omega(\alpha)$  est soit 1, soit 2, soit un nombre impair supérieur ou égal à 3).

Supposons par exemple que  $\omega(\alpha)$  est de la forme  $(1, x, 1)$  ( $x$  étant éventuellement vide). Alors, d'après la définition de  $\omega$ ,  $\alpha$  est de la forme  $U^{a_1+2}D_{k_1}s_1$  et  $\beta$  est de la forme  $U^{a_2+2}D_{k_2}s_2$ , où  $a_1, a_2 \geq 1$ , puis  $k_1, k_2 \geq 3$ , et  $s_1, s_2$  sont des suffixes (éventuellement vides)

de  $\mathcal{Z}$ . Toujours d'après la définition de  $\omega$ , on en déduit :

$$(1, \omega(U^{a_1}D_{k_1-2}s_1), 1) = \omega(\alpha) = \omega(\beta) = (1, \omega(U^{a_2}D_{k_2-2}s_2), 1),$$

d'où :

$$\omega(U^{a_1}D_{k_1-2}s_1) = \omega(U^{a_2}D_{k_2-2}s_2).$$

Puisque  $U^{a_1}D_{k_1-2}s_1$  et  $U^{a_2}D_{k_2-2}s_2$  sont tous les deux des éléments de  $\mathcal{Z}_{n-2}$ , et puisque l'hypothèse de récurrence assure que l'application  $\omega|_{\mathcal{Z}_{n-2}}$  est injective, on en déduit l'égalité

$$U^{a_1}D_{k_1-2}s_1 = U^{a_2}D_{k_2-2}s_2,$$

ce qui entraîne  $a_1 = a_2$ , puis  $k_1 = k_2$ , ainsi que  $s_1 = s_2$ , et enfin  $\alpha = \beta$ .

Les cas où la première partie de  $\omega(\alpha)$  est différente de 1 se traitent d'une manière analogue, et on montre ainsi que  $\omega|_{\mathcal{Z}_n}$  est injective. De plus, puisqu'on a  $\omega(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{C}$ , et puisque la somme des parties de  $\omega(\alpha)$  vaut  $n - 2$  dès lors qu'on a  $\alpha \in \mathcal{Z}_n$ , on en déduit que l'image de  $\omega|_{\mathcal{Z}_n}$  est (incluse dans)  $\mathcal{C}_{n-2}$ . Ensuite d'après l'entrée [A103632](#) de [69], la série génératrice de  $(|\mathcal{C}_{n-2}|)_{n \geq 2}$  est – à un terme initial près – égale à celle des chemins de  $\mathcal{Z}$  (cf. la proposition 48). Cela signifie que les cardinaux  $|\mathcal{Z}_n|$  et  $|\mathcal{C}_{n-2}|$  sont finis et égaux pour tout  $n \geq 2$ . On en déduit alors finalement que l'injection  $\omega|_{\mathcal{Z}_n} : \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n-2}$  est une bijection, pour tout  $n \geq 2$ .

Enfin, la bijectivité de l'application  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}$  s'obtient par le fait qu'on a  $\mathcal{Z} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{Z}_n$  et  $\mathcal{C} = \bigsqcup_{n \geq 2} \mathcal{C}_{n-2}$ .  $\square$

À titre illustratif, le tableau 5.2 donne les valeurs de  $\omega(\alpha)$ , lorsque  $\alpha$  est un chemin de petite taille.

$n$	$\alpha \in \mathcal{Z}_n$	$\omega(\alpha) \in \mathcal{C}_{n-2}$
2	$UD$	$\varepsilon$
3	$UUD_2$	(1)
4	$UUUD_3$	(1, 1)
	$UUDL$	(2)
5	$UUUUD_4$	(1, 1, 1)
	$UUUD_2L$	(3)
6	$UUUUUD_5$	(1, 1, 1, 1)
	$UUUUD_3L$	(1, 2, 1)
	$UUUDLD$	(2, 2)
7	$UUUUUUD_6$	(1, 1, 1, 1, 1)
	$UUUUUD_4L$	(1, 3, 1)
	$UUUUDLD_2$	(2, 1, 2)
	$UUUUD_2LD$	(5)

TABLEAU 5.2 – Premières valeurs de  $\omega$ .

# Conclusion

Dans ce document, on a introduit des nouvelles familles de chemins sur réseau, avant de mener une étude énumérative desdits chemins et des motifs qu'ils contiennent. Ce faisant, on également pu établir des liens entre ces nouveaux chemins et d'autres objets combinatoires, déjà étudiés dans la littérature, à l'aide de séries génératrices et/ou de bijections explicites.

L'introduction de trous d'air dans les chemins de Dyck est inspirée par la théorie des chemins avec catastrophes, et fait par exemple écho à [4]. L'étude des motifs dans les objets, de leur distribution et de leur popularité, s'inscrit par exemple dans la lignée de [11, 22, 39, 47, 54, 73]. Enfin, les méthodes employées pour mener à bien ces travaux sont empruntées à [30, 37, 60, 62, 76].

Ensuite, l'encyclopédie [69] a pu fournir de nombreuses séries génératrices, ainsi que les objets combinatoires correspondants, qui se sont avérés nécessaires à l'établissement de bijections avec les chemins introduits dans ce document. En guise de résumé, la figure C.1 ci-après recense de façon schématique les bijections notables qui font intervenir divers types de chemins avec trous d'air.

D'autres auteur·trices ont pu se pencher sur l'étude de familles de chemins sur réseau avec trous d'air, comme par exemple [7, 9, 10, 64, 65]. À leur tour, iels ont obtenu des résultats énumératifs sur de nouvelles familles d'objets combinatoires, inspirées de celles que l'on a introduit au cours de cette thèse.

Enfin, on termine en évoquant quelques axes de recherche qui mériteraient d'être explorés. Les chemins de Dyck avec trous d'air étant nouveaux dans le paysage combinatoire, leur étude ne fait que commencer. Ainsi, afin de compléter l'analyse de ces chemins, on pourrait notamment s'intéresser aux questions suivantes :

- Peut-on trouver un algorithme efficace qui, étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , génère un cDta. de longueur  $n$  de façon aléatoire et uniforme parmi tous les chemins de  $\mathcal{T}_n$  ?
- Peut-on trouver un algorithme efficace qui, étant donné un entier naturel  $n \geq 2$ , génère tous les cDta. de longueur  $n$  ?
- Peut-on trouver un algorithme efficace qui, étant donnée une liste de facteurs, renvoie la série génératrice des cDta. qui évitent exactement ces facteurs ? *Nous avons commencé à travailler dans cette direction pendant la thèse, mais une solution satisfaisante et élégante nous échappe actuellement.*
- Peut-on étoffer la liste des bijections du document en établissant d'autres bijections entre les chemins de Dyck avec trous d'air et des objets combinatoires ? *À titre*

*d'exemple, la dernière section de [13] assure qu'un sous-ensemble particulier de  $\mathcal{T}_n$  est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur  $n$  qui évitent les trois facteurs  $UF$ ,  $FU$ , et  $FF$ , sans pour autant donner un exemple explicite d'une telle bijection.*

- Peut-on munir l'ensemble des chemins de Dyck avec trous d'air d'une structure de treillis ? *Si oui, peut-on le faire en adaptant les ordres classiques de Stanley, Tamari, ou Kreweras (cf. [20, 38, 43, 48], par exemple) aux  $cDta$ . ?*

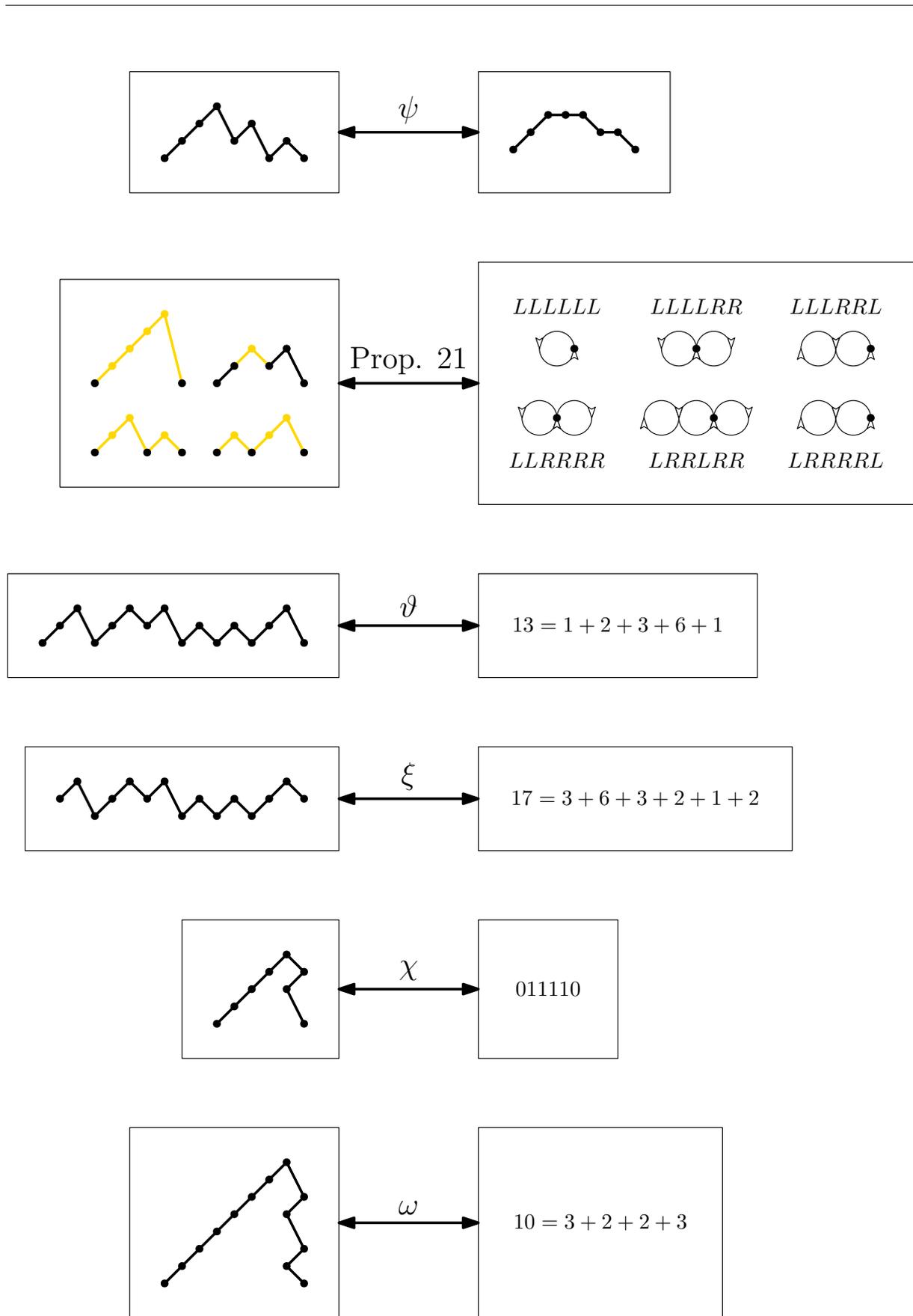


FIGURE C.1 – Principales bijections du document.



# Annexes



# Table des figures

1.1	Un exemple de chemin sur réseau. . . . .	18
1.2	Le diagramme de la permutation $46832715 \in \mathfrak{S}_8$ . . . . .	19
1.3	Un chemin sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	20
1.4	Le chemin de Dyck $U^3D^2UDU^3D^4U^2DU^2D^3$ . . . . .	21
1.5	Le chemin de Motzkin $F^2UFU^2DFD^2UF^3UDFD$ . . . . .	22
1.6	Le chemin de Dyck $UUDUDD$ contient le facteur $DUD$ . . . . .	23
1.7	Le mot 010130 contient le motif classique 213. . . . .	24
1.8	Le mot 010231 contient le motif traitillé 1,2-3,4. . . . .	24
1.9	Une bijection naturelle entre les chemins de Dyck et les mots de Dyck. . . . .	25
2.1	Graphe d'état des mots de Dyck. . . . .	35
3.1	Le tri de la permutation 42135876 correspond au chemin de Dyck avec trous d'air $UUUD_2UD_2UD_1UUUD_3$ . . . . .	40
3.2	Le cDta. $UUDUD_2UUUD_2UD_2UUD_2$ . . . . .	41
3.3	Décomposition du premier retour des cDta. . . . .	42
3.4	Décomposition de l'avant-dernier retour des cDta. . . . .	43
3.5	Processus du premier retour appliqué au cDta. $UDUUUD_3UUUDUUD_3$ . . . . .	44
3.6	Graphe d'état des cDta. partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. . . . .	46
3.7	Le cDta. dextroverse $\alpha = UUDUD_2UUUD_2UD_2UUD_2$ (gauche) et le cDta. sinistroverse $\sigma(\alpha)$ (droite). . . . .	48
3.8	Graphe d'état des cDta. sinistroverses partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. Les seuls états finaux sont ceux de la rangée du bas. . . . .	50
3.9	Application $\psi$ de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{M}$ . . . . .	53
3.10	Un cDta. et son image par $\psi$ . . . . .	54
3.11	Une promenade de $\mathcal{F}_{20}$ , encodée par la suite d'arcs $LLLLRRLRRLRLRLRLRLR$ , et le chemin sur réseau associé. . . . .	64
3.12	Un cDta. non croissant (gauche) et un cDta. croissant (droite). . . . .	68
3.13	Graphe d'état des cDta. ne dépassant pas l'altitude $t$ partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. . . . .	70
3.14	L'image par $\vartheta$ de $UUD_2UUUDUD_2UDUDUUD_2$ est $(1, 2, 3, 6, 1)$ . . . . .	73
4.1	Le gcDta. $UUDUD_3UUD_3UUUUD_3U$ . . . . .	75

4.2	Graphe d'état des gcDta. minorés par $m$ partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. . . . .	80
4.3	Graphe d'état des gcDta. dans le tube de rayon $t$ partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, et les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas. . . . .	81
4.4	L'image par $\xi$ de $UD_2UUUDUD_2UDUDUUUD$ est $(3, 6, 3, 2, 1, 2)$ . . . . .	84
5.1	Le cDota. $UUDUD_2UUUDLLDUUUUD_2LL$ . . . . .	87
5.2	Graphe d'état des cDota. partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche. . . . .	88
5.3	Graphe d'état des cDota. sans vallée partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche. . . . .	91
5.4	Graphe d'état des cDota. sans vallée en zigzag partiels. Les flèches noires (en trait plein) correspondent aux pas vers le haut, les flèches rouges (en pointillés) aux pas vers le bas, et les flèches vertes (en pointillés mixtes) aux pas vers la gauche. . . . .	94
5.5	Les trois cas non triviaux dans la définition de l'application $\omega$ . . . . .	99
C.1	Principales bijections du document. . . . .	103

## Liste des tableaux

3.1	Développement de Taylor de $f_k - [k = 0] + g_k$ , pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . . . . .	48
3.2	Développement de Taylor de $b_k$ , pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . . . . .	51
3.3	Valeurs de $n_{t,k}$ pour $0 \leq t \leq 3$ et $0 \leq k \leq 7$ . . . . .	72
4.1	Développement de Taylor de $f_k + g_k$ , pour $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . . . . .	79
5.1	Premières valeurs de $\chi$ . . . . .	98
5.2	Premières valeurs de $\omega$ . . . . .	100

# Bibliographie

- [1] A. Asinowski, C. Banderier, V. Roitner. Generating functions for lattice paths with several forbidden patterns. *Sémin. Lothar. Comb.*, 84B (2020).
- [2] C. Banderier, M. Bousquet-Mélou, A. Denise, P. Flajolet, D. Gouyou-Beauchamps. Generating functions for generating trees. *Discrete Math.*, 246 (2002).
- [3] C. Banderier, P. Flajolet. Basic Analytic Combinatorics of Directed Lattice Paths. *Theoretical Computer Science*, 281(1-2) (2002).
- [4] C. Banderier, M. Wallner. Lattice paths with catastrophes. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 19(1)(2017), #23.
- [5] E. Barcucci, A. Del Lungo, S. Fezzi, R. Pinzani. Nondecreasing Dyck paths and  $q$ -Fibonacci numbers. *Discrete Math.*, 170(1-3)(1997), 211–217.
- [6] E. Barcucci, R. Pinzani, R. Sprugnoli. The Motzkin family. *Pure Math. Appl. Ser. A*, 2(3-4) (1991).
- [7] J.-L. Baril, P. Barry. Two kinds of partial Motzkin paths with air pockets. *Ars Mathematica Contemporanea* (2023).
- [8] J.-L. Baril, D. Bevan, S. Kirgizov. Bijections between directed animals, multisets and Grand-Dyck paths. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 27(2)(2020), #P2.10.
- [9] J.-L. Baril, R. Flórez, J. L. Ramírez. Counting symmetric and asymmetric peaks in Motzkin paths with air pockets. *Australasian Journal of Combinatorics* 89(2)(2024).
- [10] J.-L. Baril, R. Flórez, J. L. Ramírez. Symmetries in Dyck paths with air pockets. *Aequationes mathematicae* (2024).
- [11] J.-L. Baril, R. Genestier, S. Kirgizov. Pattern distributions in Dyck paths with a first return decomposition constrained by height. *Discrete Math.*, 342(9)(2020), 111995.
- [12] J.-L. Baril, S. Kirgizov, R. Maréchal, V. Vajnovszki. Enumeration of Dyck paths with air pockets. *Journal of Integer Sequences*, 26(2023).
- [13] J.-L. Baril, S. Kirgizov, R. Maréchal, V. Vajnovszki. Grand Dyck paths with air pockets. *The Art of Discrete and Applied Mathematics* 7(1)(2024).
- [14] J.-L. Baril, S. Kirgizov, A. Petrossian. Dyck paths with a first return decomposition constrained by height *Discrete Math.*, 341(6) (2018).
- [15] J.-L. Baril, R. Maréchal, H. Prodinger. Skew Dyck paths with air pockets. *Aequationes mathematicae* (2024).

- [16] J.-L. Baril, A. Petrossian. Equivalence classes of Dyck paths modulo some statistics. *Discrete Math.*, 338(4)(2015), 655–660
- [17] J.-L. Baril, J. L. Ramírez. Partial Motzkin paths with air pockets of the first kind avoiding peaks, valleys or double rises. Soumis, 2023.
- [18] J.-L. Baril, J. L. Ramírez, L. M. Simbaqueba. Counting Prefixes of Skew Dyck Paths. *Journal of Integer Sequences*, 24 (2021).
- [19] P. Barry. Riordan Arrays : A Primer. *Logic Press*, 2017.
- [20] O. Bernardi, N. Bonichon. Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 116(1) (2009).
- [21] R. Bernhart. Catalan, Motzkin, and Riordan numbers. *Discrete Math.*, 204 (1999).
- [22] M. Bóna. *Combinatorics of Permutations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [23] M. Bóna. Surprising symmetries in objects counted by Catalan numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(1)(2012), #P62.
- [24] M. Bousquet-Mélou, A. Claesson, M. Dukes, S. Kitaev.  $(\mathbf{2} + \mathbf{2})$ -free posets, ascent sequences and pattern avoiding permutations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 117(7)(2010), 884–909.
- [25] M. Bousquet-Mélou, M. Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. *Contemporary Mathematics*, 520 (2010).
- [26] A. Burstein, L. W. Shapiro. Pseudo-involutions in the Riordan group. *Journal of Integer Sequences*, 25 (2022).
- [27] E. Czabarka, R. Flórez, L. Junes. Some enumerations on non-decreasing Dyck paths. *Electron. J. Combin.*, 22 (2015).
- [28] E. Czabarka, R. Flórez, L. Junes, J. L. Ramírez. Enumerations of peaks and valleys on non-decreasing Dyck paths. *Discrete Math.*, 341 (2018).
- [29] E. Deutsch. Dyck path enumeration. *Discrete Math.*, 204(1999), 167–202.
- [30] E. Deutsch, S. Elizalde. A simple and unusual bijection for Dyck paths and its consequences. *Ann. Comb.*, 7(3) (2003).
- [31] E. Deutsch, E. Munarini, S. Rinaldi. Skew Dyck paths. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(8) (2010).
- [32] E. Deutsch, L. Shapiro. A survey of the Fine numbers. *Discrete Math.*, 241 (2001).
- [33] R. Donaghey, L. Shapiro. Motzkin Numbers. *J. Combin. Theory Ser. A*, 23 (1997).
- [34] S. Elizalde. Fixed points and excedances in restricted permutations. *Electron. J. Combin.*, 18(2) (2011).
- [35] L. Euler. Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. *Academia imperialis scientiarum Petropolitana, Berolini, Officina Michaelis*, 1755.
- [36] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.*, 32 (1980).

- 
- [37] P. Flajolet, R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [38] H. Friedman, D. Tamari. Problèmes d'associativité : Une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative. *J. Combinatorial Theory*, 2 (1967).
- [39] S. Heubach, T. Mansour. *Combinatorics of Compositions and Words*. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [40] F. Hirzebruch. Eulerian polynomials. *Münster Journal of Mathematics*, 1(1) (2008).
- [41] V. E. Hoggat, Jr., M. Bicknell. Palindromic compositions. *The Fibonacci Quarterly*, 13.4 (1975).
- [42] C. Homberger. Expected patterns in permutation classes. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(3)(2012), #P43.
- [43] S. Huang, D. Tamari. Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *J. Combin. Theory Ser. A*, 13(1) (1972).
- [44] K. Humphreys. A history and a survey of lattice path enumeration. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(8) (2010).
- [45] M. Junge. Weighted Dyck paths with air pockets. Communication privée (2024).
- [46] M. Kauers, R. Yatchak. Walks in the quarter plane with multiple steps. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 2015.
- [47] S. Kitaev. *Patterns in permutations and words*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [48] D. E. Knuth. *The art of computer programming*, Volume 1. Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- [49] I. Kortchemski, C. Marzouk. Simply generated non-crossing partitions. *Combin. Probab. Comput.* 26 (2017).
- [50] V. Kostov, A. Martínez-Finkelshtein, B. Shapiro. Narayana numbers and Schur-Szegő composition. *Journal of Approximation Theory*, 161 (2009).
- [51] C. Krattenthaler. Permutations with restricted patterns and Dyck paths. *Advances in Applied Mathematics*, 27(2) (2001).
- [52] A. Krinik, G. Rubino, D. Marcus, R.J. Swift, H. Kasfy, H. Lam. Dual processes to solve single server systems. *Journal of Stat. Planning and Inference*, 135(1)(2005), 121–147.
- [53] I. Kurkova, K. Raschel. On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 116 (2012).
- [54] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 1997.
- [55] P. Luschny. Fibonacci Meanders. [http://oeis.org/wiki/User:Peter\\_Luschny/FibonacciMeanders](http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/FibonacciMeanders), December 2011.
- [56] T. Mansour. Statistics on Dyck paths. *J. Integer Sequences*, 9(2006), 06.1.5.

- [57] T. Mansour, M. Shattuck, M. Wilson. Congruence successions in compositions. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16(1) (2014).
- [58] D. Merlini, R. Sprugnoli, M.C. Verri. Some statistics on Dyck paths. *J. Statis. Plann. Inference*, 101(2002), 211–227.
- [59] T. Motzkin. Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948).
- [60] A.G. Orlov. On asymptotic behavior of the Taylor coefficients of algebraic functions. *Siberian Mathematical Journal*, 25(5) (1994), 1002–1013.
- [61] A. Panayotopoulos, A. Sapounakis. On the prime decomposition of Dyck paths. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 40(2002), 33–39.
- [62] H. Prodinger. The kernel method : A collection of examples. *Sém. Lothar. Combin.*, B50f (2004).
- [63] H. Prodinger, S. Wagner. Minimal and maximal plateau lengths in Motzkin paths. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Proceedings* (2007).
- [64] H. Prodinger. Partial Dyck paths with Air Pockets. *Integers*, 22(2022).
- [65] H. Prodinger.  $S$ -Motzkin paths with catastrophes and air pockets. *Discrete Mathematics Letters* 12 (2023).
- [66] V. Roitner. Contacts and returns in 2-watermelons without wall. *Bull. Inst. Combin. Appl.* 89 (2020).
- [67] A. Sapounakis, I. Tasoulas, P. Tsikouras. Counting strings in Dyck paths. *Discrete Math.*, 307(23)(2007), 2909–2924.
- [68] L. W. Shapiro, S. Getu, W.-J. Woan, L. C. Woodson. The Riordan group. *Discrete Applied Mathematics*, 34(1-3) (1991).
- [69] N.J.A. Sloane : The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, available electronically at <http://oeis.org>.
- [70] R. P. Stanley. *Catalan Numbers*. Cambridge University Press, 2015.
- [71] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. Cambridge University Press, 1997.
- [72] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume 2*. Cambridge University Press, 1999.
- [73] Y. Sun. The statistic “number of udu’s” in Dyck paths. *Discrete Math.*, 287(2004), 177–186.
- [74] J.R. Sylvester, Determinants of Block Matrices. *The Mathematical Gazette*, 84(501), 2000, pp. 460–67.
- [75] S. Wienand. Personal page on the OEIS Wiki. [http://oeis.org/wiki/User:Susanne\\_Wienand#Definition\\_of\\_meanders\\_concerned\\_by\\_these\\_sequences](http://oeis.org/wiki/User:Susanne_Wienand#Definition_of_meanders_concerned_by_these_sequences), November 2011.
- [76] H. S. Wilf. *generatingfunctionology*. A K Peters/CRC Press, 2014.

# Index

- chemin sur réseau, 19
  - catastrophe, 60
  - chemin de Dyck, 21
  - chemin de Dyck avec trous d'air, 41
    - baissé, 41
    - borné, 69
    - croissant, 68
    - dextroverse, 48
    - décomposition de l'avant-dernier retour, 42
    - décomposition du premier retour, 42
    - monté, 41
    - premier, 41
    - processus du premier retour, 44
    - sinistroverse, 48
  - chemin de Dyck oblique avec trous d'air, 87
    - sans vallée, 91
    - sans vallée en zigzag, 93
  - chemin de Motzkin, 21
    - sans pic, 52
  - chemin partiel, 45
  - grand chemin de Dyck avec trous d'air, 75
    - borné, 80
    - minoré, 79
    - premier négatif, 76
    - premier positif, 75
  - grand chemin de Motzkin, 64
  - trou d'air, 41
- composition d'un entier, 72
- distribution d'un motif, 29
- décomposition récursive, 33
- graphe d'état, 35
- mot
  - binaire, 17
  - de Dyck, 33
- motif, 22
  - classique/non consécutif, 23
  - facteur, 22
  - préfixe, 22
  - suffixe, 22
  - traitillé, 24
- méthode du noyau, 34
- nombres
  - de Catalan, 21
    - généralisés, 45
  - de Motzkin, 22
  - de Narayana, 58
  - de Riordan, 59
  - eulériens, 29
- objet combinatoire, 17
- permutation, 17
  - diagramme d'une permutation, 19
  - triable par une pile, 39
- popularité d'un motif, 29
- promenade de Fibonacci, 63
- représentation
  - en diagramme, 19
  - en mot, 18
- statistique combinatoire, 25
  - statistiques équidistribuées, 54
  - transport de statistiques, 54
- série génératrice, 27
  - bi-/tri-/...-/multivariée, 29
  - exponentielle, 31
  - ordinaire, 31
  - univariée, 28